

Report 電磁気学 JS0.5

J Simplicity

February 4, 2012

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Preface

電磁気学はファラデーとマクスウェルによって創始された物理学です。力学と電磁気学の二大理論は古典物理学の中核を形成しています。力学は 20 世紀はじめの相対性理論と量子力学の革命の際、修正を余儀なくされました。しかしながら、電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式は、その革命のときも、そのままの形で生き残ることができました。さらに、素粒子論の基礎である量子電磁力学においても、そのまま適用することができます。

電磁気学の基礎概念である場の考え方はファラデーによって導入されました。その後、場の概念は場の量子論でも中心的な存在となり、素粒子論において大きく飛躍することになります。

Contents

I	電気と磁気	6
1	静電荷（クーロンの法則）	7
1.1	静電荷	7
1.2	クーロンの法則	8
2	静電場（ガウスの法則）	10
2.1	電場の概念と近接作用	10
2.2	ガウスの法則	12
3	静電位	16
3.1	静電位	16
3.2	電位差と仕事の関係	18
3.3	静電場と電位差の関係	19
3.4	ポアソン方程式とラプラス方程式	21
3.5	電気双極子	22
4	導体と静電場	26
4.1	静電誘導	26
4.2	導体の性質	26
4.3	コンデンサー	27
4.4	コンデンサー回路	29
4.5	静電エネルギー	32
6	定常電流と静電場	35
6.1	電流密度と電流保存則	35
6.2	オームの法則	37
6.3	電流回路	38

6.4	コンデンサーと抵抗が混在する回路	41
6.5	ジュール熱	42
7	静磁荷・静磁場・静磁位	44
7.1	静磁荷	44
7.2	静磁場	44
7.3	静磁位	46
8	アンペール力とローレンツ力	49
8.1	アンペール力	49
8.2	ローレンツ力	51
9	定常電流の静磁場（ビオ-サバールの法則とアンペールの法則）	53
9.1	定常電流の静磁場の3つの例	53
9.2	ビオ-サバールの法則	54
9.3	磁気双極子	58
9.4	アンペールの法則	62
11	電磁誘導（ファラデーの法則）	68
11.1	ファラデーの電磁誘導の法則	68
11.2	自己誘導	73
11.3	静磁エネルギー	77
12	交流	80
12.1	交流発電機	80
12.2	R回路	81
12.3	L回路	83
12.4	C回路	85
12.5	RLC直列回路（交流電源がない場合）	87
12.6	RLC直列回路（交流電源がある場合）	93
II	電磁気学の成立	99
13	マクスウェル方程式	100
13.1	マクスウェル方程式	100
13.2	電磁場のエネルギー	103

13.3 電磁ポテンシャル	104
13.4 物理量と単位の定義	105
14 電磁波	107
14.1 電磁波	107

Part I

電気と磁気

Chapter 1

静電荷（クーロンの法則）

1.1 静電荷

電氣的現象を取り扱う場合、正電荷と負電荷の間の静電氣力が問題となります。（静電氣力のことを、今後一貫してクーロン力と呼ぶことにします。）電荷という物質のようなものがある訳ではなく、物質の内部の電子がもっている負電荷と、陽子がもっている正電荷の過不足により、正に帯電したり負に帯電したりするのです。つまり、電荷は素粒子の属性になります。この意味で、電荷は力学における質量と同じような性質をもつ物理量であるといえます。ただし、電荷は正と負がありますが、質量には正しかありません。電荷の単位には [C]（クーロン）を使います。1[C] とは 1[A] の電流が 1[s] の間に運ぶ電荷であると定義されます。つまり、

$$1[C] = 1[A] \times 1[s]$$

となります。電子 1 個のもっている電荷は $-e[C]$ 、陽子 1 個のもっている電荷は $e[C]$ です。ここで、 $e[C]$ は最も小さな電荷の大きさで電氣素量と言います。電氣素量は次の値をもちます。

$$e = 1.602 \times 10^{-19}[C]$$

ただし、現在発見されているクォークの電荷は電氣素量の分数倍であることが判明しています。また、電荷の中で、特にその大きさが無視でき、点のように扱うことができるものを点電荷といいます。

電荷は消滅したり、生成したりしません。このことを電荷保存の法則といいます。この法則が成立する理由は、電荷をもっている電子や陽子が生成したり、消滅したりしないことによるものとされてきました。しかし、現代素粒子論によれば、素粒子（電子等）は生成消滅することが理解されるようになったことに注意しておきましょう。しかしながら、一

般に，CPT 変換に対しては，必ず保存されることがわかっています．ここで，C は Charge（電荷），P は Parity（パリティ），T は Time（時間）を意味します．

全ての物質は電氣的性質により，三つに分類されます．一つ目は電気を導きやすい物質である導体です．代表例としては金属が挙げられます．金属が電気を導く性質を持っているのは，その内部にある自由電子のためです．また，電解質溶液も導体の一種と考えることができます．この場合，電荷を運ぶのはイオンです．二つ目は不導体（絶縁体，誘電体ともいいます．）です．この物質は電気を通しません．例としては，ガラス，セラミック，ゴム，エポナイト，プラスチック等が挙げられます．三つ目は導体と不導体の中間の性質をもつ半導体です．例としてはシリコン，ゲルマニウム等が挙げられます．半導体はエレクトロニクスで大変活躍している物質です．全ての物質は三つのうちのいずれかになるので，全ての物質は電気と関係があるということになります．特別な物質だけが電気に関係するのではないということです．

1.2 クーロンの法則

二つの電荷の間にはたらき合うクーロン力の大きさ $F[N]$ は，次式で表されます．

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

この関係をクーロンの法則といいます．ただし， $k_0[N \cdot m^2/C^2]$ はクーロンの比例定数で，次の値をもちます．

$$k_0 = 8.988 \times 10^9 [N \cdot m^2/C^2]$$

また， $q_1[C], q_2[C]$ は電荷， $r[m]$ は電荷間の距離です．電荷 $q_1[C], q_2[C]$ が異符号のときには引力が，同符号のときには斥力がはたらき合います．クーロンの法則は実験によって発

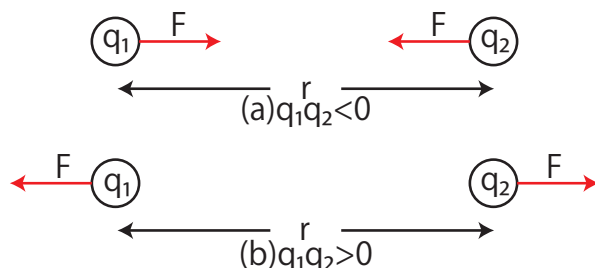


Figure 1.1: クーロンの法則

見されたものであり，理論的に導かれたものではありません．特に，何故距離の逆2乗に比例するのは理論的に導かれるものではなく，何度も精密な実験により検証されるもの

なのです。(何故, 逆 3 乗, 逆 1.5 乗ではないのでしょうか? 不思議ですね. この逆 2 乗に比例することから, これからの Chapter で見ていく論理の展開がとても綺麗なものになるのです.)

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 2

静電場（ガウスの法則）

2.1 電場の概念と近接作用

二つの電荷の間には、

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

の大きさのクーロン力が働きます。1785年、クーロンにより発見された当時、この力は空間を隔てたまま働き合うと認識されていました。（離れたものが力を及ぼすことを遠隔作用といいます。遠く隔てたままの作用です。）そして、力が働くメカニズムについては何も言及されませんでした。

ある物理量が空間の場所によって決まるとき、その物理量を場といいます。例えば、物体の場所によって温度がきまるとき、温度場といいます。温度場は大きさだけの場ですので、スカラー場です。また、流体の速度が場所によって決まるとき、速度場といいます。速度場は大きさと向きをもった場ですので、ベクトル場です。以下考えていくように、電気場のことを電場といいます。電場はベクトル場です。

クーロンの法則が発見されてから、52年後の1837年、ファラデーは近接作用の概念を導入しました。この概念を用いて、次のようにクーロン力のメカニズムについて、踏み込んで考えましょう。電荷が何もないうち、空間には特別なことは起こっていません。（図の(a)無の状態。）ここで、1つだけ電荷 $Q[C]$ を置きます。そのとき、電荷の周りの空間がある種の緊張状態になります。その状態を電場 E が生じたと考えます。（図の(b)電場の発生。）電場が生じている状態で、もう一つの電荷 $q[C]$ を置きます。すると、後から置いた電荷 $q[C]$ は、はじめに置いた電荷 $Q[C]$ から距離を隔てたまま力を受けるのではなく、空間に生じている電場 E から力 $F[N]$ を受けると考えます。（図の(c)近接作用。）電荷がすぐ近くの空間から力を受けることを近接作用といいます。例えて説明すると、トラン

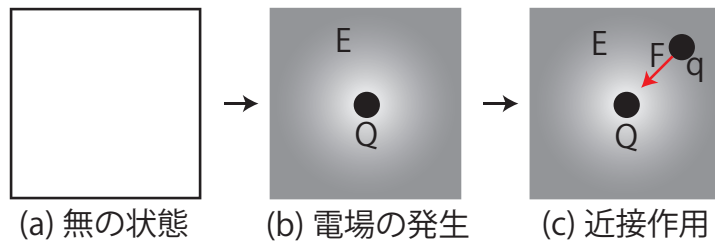


Figure 2.1: 静電場と近接作用

ポリンの上に何も載っていないときは電場の無い状態で、そこに重りを置くとトランポリンが窪みますが、それが電場の生じている状態と考えることができます。そのとき、ボールを置くとトランポリンの窪みから（つまり電荷の場合は電場から）力を受けて、ボールは転がることになります。

クーロンの法則，

$$F = k_0 \frac{qQ}{r^2}$$

は、そのままでは遠隔作用による表式になっています。この式を変形して、近接作用の概念を式の上で表すことにしましょう。次のように、簡単に変形します。

$$F = q \cdot k_0 \frac{Q}{r^2}$$

これだけで、近接作用の式に移行したのです。もっとわかり易くするために、この式で、

$$E = k_0 \frac{Q}{r^2}$$

とおき、電場を表すと捉えます。これが、最初に置いた $Q[C]$ の電荷がつくる電場 $E[N/C]$ です。そうすると、

$$F = qE$$

という、電場とクーロン力の関係を表した近接作用の概念を表した式になります。すなわち、電荷 $q[C]$ に作用するクーロン力 $F[N]$ は、空間に生じている電場 $E[N/C]$ から働くと認識することができるのです。

ここで、一様な電場というものに触れておきます。2枚の平行な極板を用意して、それぞれ正と負の電荷を帯電させます。このとき、正と負の電荷の絶対値は等しいものとします。この2枚の極板の間には電場が生じますが、それはどこをとっても同じ大きさ、同じ向きの一様な電場です。この一様な電場 $E[N/C]$ の中に電荷 $q[C]$ を置くと、

$$F = qE$$

の大きさのクーロン力が生じるのです。

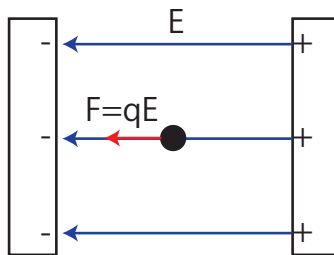


Figure 2.2: 一様な静電場

2.2 ガウスの法則

電荷 $Q[C]$ を中心とする半径 $R[m]$ の球面を考え、

$$E(R) = k_0 \frac{Q}{R^2}$$

の式の両辺に、球の面積 $4\pi R^2[m^2]$ をかけて計算します。

$$4\pi R^2 E(R) = 4\pi R^2 k_0 \frac{Q}{R^2}$$

$$\therefore 4\pi R^2 E(R) = 4\pi k_0 Q$$

ここで、真空の誘電率、

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{4\pi k_0}$$

を定義すると、

$$4\pi R^2 E(R) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

となります。最後の式は、電荷 $Q[C]$ を中心とする半径 $R[m]$ の球面上の電場 $E(R)[N/C]$ に全球面の面積を掛けたものが、 $\frac{Q}{\epsilon_0}[N \cdot m^2/C]$ に等しいことを表しています。

上記のことが、電荷 $Q[C]$ を囲む任意の閉曲面 S に対して成立することを証明します。閉曲面 S 上の微小面を $dS[m^2]$ とします。 $dS[m^2]$ に外向きに立てた法線ベクトル（単位ベクトル）を $\vec{n}(\vec{x})$ とすると、 $dS[m^2]$ 面上の電場 $\vec{E}(\vec{x})[N/C]$ の $\vec{n}(\vec{x})$ 方向の成分は、

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) &= E \cos \theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cos \theta \end{aligned}$$

ここで、 $E[N/C]$ は電場の大きさ、 $r[m]$ は電荷 $Q[C]$ から微小面 $dS[m^2]$ までの距離、 $\theta[rad]$ は $\vec{E}(\vec{x})[N/C]$ と $\vec{n}(\vec{x})$ の間の角度です。このとき、電場 $\vec{E}(\vec{x})[N/C]$ に垂直な微小面の面積は、 $dS' = dS \cdot \cos \theta$ になります。また、半径 $R[m]$ の球面上の微小面積 $df[m^2]$ と $dS'[m^2]$ との比は、

$$\frac{dS'}{df} = \frac{r^2}{R^2}$$

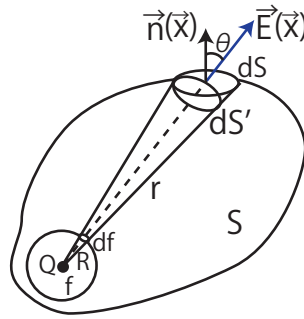


Figure 2.3: ガウスの法則 1

になります。故に、

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS &= E \cos \theta \cdot dS \\ &= E dS' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{r^2 df}{R^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{df}{R^2} \end{aligned}$$

となります。これを閉曲面 S 上にわたって面積分すると、

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \int_f df \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 \\ \therefore \int_S \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

となります。

次に、電荷 $Q[C]$ が閉曲面 S の外側にある場合を考えます。図より、

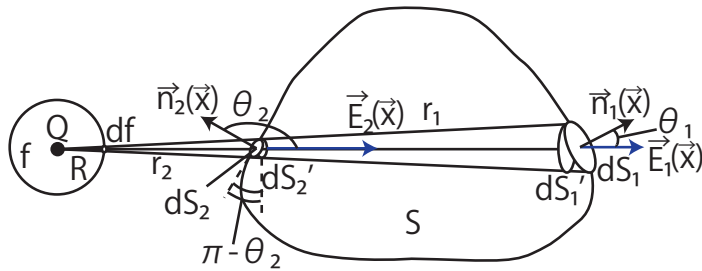


Figure 2.4: ガウスの法則 2

$$dS'_1 = \cos \theta_1 \cdot dS_1 = \frac{r_1^2}{R^2} df$$

$$dS'_2 = \cos(\pi - \theta_2) \cdot dS_2 = \frac{r_2^2}{R^2} df$$

の関係が成立します。故に、

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{x}) \cdot \vec{n}_1(\vec{x}) dS_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cos \theta_1 dS_1 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} dS'_1 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{R^2} df \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} df \end{aligned}$$

と、

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(\vec{x}) \cdot \vec{n}_2(\vec{x}) dS_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_2^2} \cos \theta_2 dS_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_2^2} \cos(\pi - \theta_2) dS_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_2^2} dS'_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_2^2} \cdot \frac{r_2^2}{R^2} df \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} df \end{aligned}$$

となります。従って、

$$\vec{E}_1(\vec{x}) \cdot \vec{n}_1(\vec{x}) dS_1 + \vec{E}_2(\vec{x}) \cdot \vec{n}_2(\vec{x}) dS_2 = 0$$

であり、閉曲面 S 上にわたる面積分も 0 になります。すなわち、電荷 $Q[C]$ が閉曲面 S の外にあるとき、

$$\int_S \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = 0$$

が成立します。

議論を一般的にして、閉曲面 S の内部に電荷 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N[C]$ があり、外部に電荷 $q_a, q_b, \dots, q_z[C]$ がある場合を考えます。これらの電荷が S 上の任意の位置につくる電場をそれぞれ、 $\vec{E}_1(\vec{x}), \vec{E}_2(\vec{x}), \dots, \vec{E}_N(\vec{x}), \vec{E}_a(\vec{x}), \vec{E}_b(\vec{x}), \dots, \vec{E}_z(\vec{x})[N/C]$ とすると、これらを重ね合わせた全電場 $\vec{E}(\vec{x})[N/C]$ は、

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_1(\vec{x}) + \dots + \vec{E}_N(\vec{x}) + \vec{E}_a(\vec{x}) + \dots + \vec{E}_z(\vec{x})$$

になります。ここで、閉曲面上 S 全体について、面積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS &= \int_S \vec{E}_1(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS + \cdots + \int_S \vec{E}_N(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS \\ &\quad + \int_S \vec{E}_a(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS + \cdots + \int_S \vec{E}_z(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS \\ &= \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \cdots + \frac{Q_N}{\epsilon_0} + 0 + \cdots + 0 \\ \therefore \int_S \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS &= \frac{1}{\epsilon_0} (Q_1 + \cdots + Q_N) \end{aligned}$$

となります。電荷が空間内のある領域にわたって連続的に分布しているとき、電荷密度（単位体積当たりの電荷）を $\rho(\vec{x})[C/m^3]$ とすると、上式は、

$$\boxed{\int_S \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}) dV} \quad (2.1)$$

となります。（右辺は体積分です。）この (2.1) 式をガウスの法則（積分形）と言います。ベクトル解析のガウスの定理は、任意のベクトル \vec{A} について、

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

と表せます。この定理より、(2.1) 式は、

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}) dV$$

と変形されます。この式の両辺のそれぞれの被積分関数は等しくなります。故に、

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}} \quad (2.2)$$

が成立します。この (2.2) 式をガウスの法則（微分形）と言います。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 3

静電位

3.1 静電位

普通、高いとか低いとかいう概念は重力が働いている場合に使います。物体は重力を受けて、自然に高いところから低いところへ移動します。もし、重力が働かない無重力状態にいれば、高低の概念は成立しないことになります。(宇宙空間にいると想像して下さい。どちらが上なのかかわからないでしょう。) 通常、高さは地面からの距離で測りますが、その代わりにポテンシャル $mgh[J]$ を用いても表すことができます。つまり、 $mgh[J]$ が大きい程高いということになります。特に、質量 $m[kg]$ の重みを除いた $gh[m^2/s^2]$ の部分が高さを表していると考えることができます。

この高いとか低いとかいう概念を、クーロン力が働く場合にも考えてみましょう。例えば、2枚の極板を用意して、それぞれ正と負に帯電させて一様な静電場をつくります。その中に正電荷 $q[C]$ を置くと、 $q[C]$ は一様な静電場から力 $qE[N]$ を受けて自然に移動します。このとき、高いところから低いところへ移動したと考えるのです。ここで、高低を重力の場合と同じように、ポテンシャルをもちいて表すことにしましょう。(クーロン力は保存力であり、ポテンシャルを考えることができます。) 負の極板は最も低いところであるので、これをアースして基準 O とし、その高さを $0[J]$ とします。はじめの静電荷 $q[C]$ の位置を A (座標 z) として、ポテンシャル $V[J]$ を計算します。(静電荷 $q[C]$ が A から O まで移動するとき、保存力であるクーロン力がする仕事がポテンシャルです。)

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \int_A^O \{0 \cdot dx + 0 \cdot dy + (-qE)dz\} \\ &= \int_z^0 (-qE)dz \\ &= qEz \end{aligned}$$

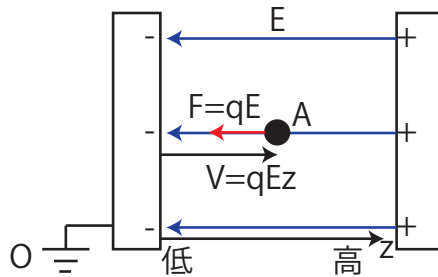


Figure 3.1: 静電位 1

これが、一様な静電場の場合のポテンシャルの式です。ここで、一様な重力が働く場合と同じように、この式を $q[C]$ の重みと高さを表す量 $\phi(z)[V]$ に分解します。 ($V(z) = q\phi(z)$.) このとき、高さを表す $\phi(z)[V]$ を静電位と言います。ここで、

$$V(z) = q \times Ez$$

より、一様な静電場の静電位 $\phi(z)[V]$ は、

$$\phi(z) = Ez$$

になります。静電位 ϕ の単位は $[V] = [J/C]$ です。また、静電場 $E[N/C]$ の単位は関係式 $\phi(z) = Ez$ より、 $[V/m]$ と表すこともできます。

次に点電荷の周りの静電位について考えてみます。正の点電荷 $Q[C]$ の周りには静電場が生じています。その静電場の中に正の静電荷 $q[C]$ を置くと、クーロン力を受け、自然と2つの間の距離が広がるように移動します。このとき、静電荷 $q[C]$ は高いところから低いところへ動いたと考えます。すなわち、点電荷 $Q[C]$ に近い方が高く、遠い方が低いということになります。この高低をポテンシャルで表しましょう。万有引力の場合と同じように、次の計算を行います。

$$\begin{aligned} V(A) - V(\infty) &= W'_{A \rightarrow \infty} \\ &= \int_A^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \right) dr \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_A^{\infty} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r_A} \end{aligned}$$

ここで、無限遠をポテンシャルの基準として、 $V(\infty) = 0[J]$ としています。また、点電荷 $Q[C]$ から A までの距離 $r_A[m]$ を、任意の距離として $r[m]$ とおき直すと、ポテンシャルは次式になります。

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r}$$

この式を、 $q[C]$ の重みと、残りの高さを表す量、すなわち静電位 $\phi(r)[V]$ に分解します。
($V(r) = q\phi(r)$.) ここで、

$$V(r) = q \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

より、静電位 $\phi(r)[V]$ は次式になります。

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

この式は、点電荷 $Q[C]$ が負の場合も自動的に含んでいます。静電位 $\phi(r)[V]$ と距離 $r[m]$ の関係をグラフに描くと図“静電位 2”のようになります。

3.2 電位差と仕事の関係

静電場のなかでクーロン力と外力がつりあいながら、ゆっくりと動く場合、外力がする仕事 $W[J]$ を求めます。図“電位差と仕事”は理解を助けるために載せましたが、いまから議論することは一様な静電場とは限らず、一般的な静電場についても言えることです。“静電荷を 1 から 2 までゆっくりと移動させたとき外力がする仕事の大きさ $W[J]$ ”は、“静電荷を 0 から 2 までゆっくりと移動させたとき外力がする仕事”から、“静電荷を 0 から 1 までゆっくりと移動させたとき外力がする仕事”を引いたものです。したがって、その値は次のように計算できます。

$$\begin{aligned} W &= V_2 - V_1 \\ &= q\phi_2 - q\phi_1 \\ &= q(\phi_2 - \phi_1) \\ &= q\phi_{12} \end{aligned}$$

ただし、

$$\phi_{12} \equiv \phi_2 - \phi_1$$

とおきました。ここで、 $\phi_{12}[V]$ は電位差といい、その名の通り静電位の差を表します。電位差を求めるときは、高い静電位から低い静電位を引き、必ず正にします。このとき、クーロン力のする仕事 $W'[J]$ は、

$$W' = -q\phi_{12}$$

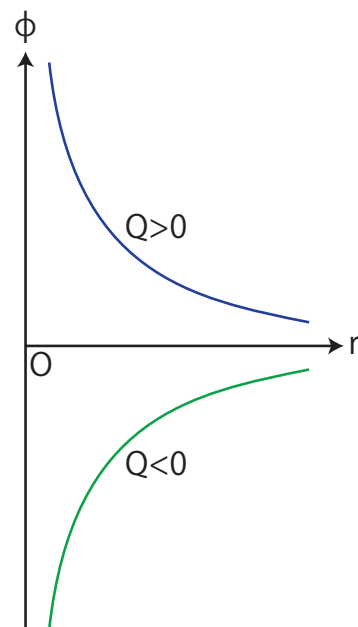


Figure 3.2: 静電位 2

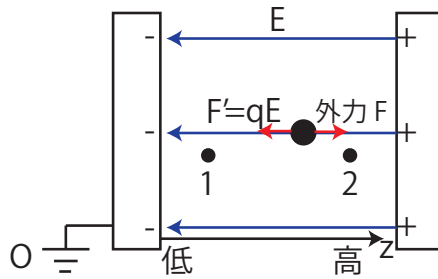


Figure 3.3: 電位差と仕事

です。負の静電荷を運ぶ場合も含めてまとめておきましょう。外力がする仕事 $W[J]$ は、

$$W = \pm |q|\phi_{12}$$

です。ここで、正の静電荷を低いところから高いところへ外力が持ち上げたときは正の符号をとり、負の静電荷を高いところから低いところへ外力が持ち上げたときも正の符号をとります。クーロン力がする仕事 $W'[J]$ についても、まとめておきます。

$$W' = \mp |q|\phi_{12}$$

ここで、正の静電荷を低いところから高いところに外力が持ち上げたときは負の符号をとり、負の静電荷を高いところから低いところへ外力が持ち上げたときも負の符号をとります。

3.3 静電場と電位差の関係

静電荷・静電場・静電位の関係をまとめておきます。静電荷が存在すれば、その周りに静電場が生じます。静電場が生じると高低の違いが生じ、静電位の概念が生まれてきます。逆に、静電位に差があれば、静電場が存在する筈であり、静電場があるということは、静電場を発生させる静電荷が存在するということになります。このように、この3つの概念は密接な関係を持っています。(ただし、電荷が無くても変動する電場と磁場は存在することができます。)

静電位の差のことを電位差といいました。静電位は基準をもつ絶対的な物理量ですが、電位差は相対的な物理量であるということが出来ます。静電位 $\phi_1[V]$ と静電位 $\phi_2[V]$ の電位差 $\phi_{12}[V]$ は、次のように表せます。ただし、 $\phi_1[V] < \phi_2[V]$ とします。

$$\phi_{12} = \phi_2 - \phi_1$$

電位差を求めるときは、高い静電位から低い静電位を引き、常に正の値をとるようにします。ここで、一様な静電場の場合についての電位差を考えましょう。

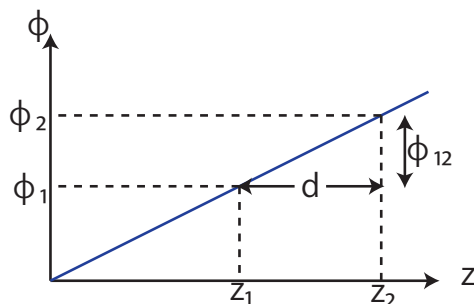


Figure 3.4: 静電場と電位差

$$\begin{aligned}
 \phi_{12} &= \phi_2(z) - \phi_1(z) \\
 &= Ez_2 - Ez_1 \\
 &= E(z_2 - z_1) \\
 \therefore \phi_{12} &= Ed
 \end{aligned}$$

この式の意味は静電場が存在すれば電位差が生じるということです。あるいは、書き直して、

$$E = \frac{\phi_{12}}{d}$$

となります。この式の意味は、電位差のあるところには静電場が存在しているということです。一様な静電場の場合、静電場と電位差の関係を斜面にたとえることができます。図のグラフをそのまま斜面と見なすのです。縦軸は静電位 $\phi(z)[V]$ になっていますが、これは電気的な意味での高さになります。斜面の傾きが静電場であり、斜面の高さの差が電位差に相当するということです。

ここで、一般的に静電場と電位差の関係を導いておきましょう。クーロン力は保存力です。保存力であるクーロン力 $F'[N]$ を、静電位 $\phi[V]$ で表します。以下の証明で使う文字を挙げておきますが、 $W'[J]$ は保存力であるクーロン力のする仕事、 A ははじめの位置、 B は終りの位置、 O は基準の位置です。

$$\begin{aligned}
 W'_{A \rightarrow B} &= W'_{A \rightarrow O \rightarrow B} \\
 &= W'_{A \rightarrow O} + W'_{O \rightarrow B} \\
 &= W'_{A \rightarrow O} - W'_{B \rightarrow O} \\
 &= V(A) - V(B)
 \end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned}\int_A^B \vec{F}'(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= - \int_A^B dV \\ &= - \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) \\ \therefore \int_A^B \vec{F}'(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_A^B \{-\nabla V(\vec{x})\} \cdot d\vec{x}\end{aligned}$$

となります。被積分関数が等しくなりますので,

$$\vec{F}'(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x})$$

が成り立ちます。故に,

$$q\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\{q\phi(\vec{x})\}$$

さらに,

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\phi(\vec{x}) \quad (3.1)$$

が成立します。この (3.1) 式が静電場と静電位の一般的な関係を表します。ただし、右辺の記号ナブラは,

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

で定義されます。

3.4 ポアソン方程式とラプラス方程式

静電場と静電位の関係を導きましたので、次に静電荷と静電位の関係を考えます。“静電場 (ガウスの法則)” の Chapter のガウスの法則 (微分形),

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

に, (3.1) 式,

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\phi(\vec{x})$$

を代入します。

$$\nabla \cdot \{-\nabla\phi(\vec{x})\} = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

したがって,

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (3.2)$$

が成立します。(3.2) 式をポアソン方程式といいます。ただし、左辺の記号,

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

はラプラシアンと言います。また、電荷密度 $\rho[C/m^3]$ が $0[C/m^3]$ の場合は、

$$\Delta\phi(\vec{x}) = 0 \quad (3.3)$$

が成立します。この式をラプラス方程式と言います。

ポアソン方程式または、ラプラス方程式を解き、電位 $\phi(\vec{x})[V]$ を求めて、その $\phi(\vec{x})[V]$ を静電場と静電位の関係 (3.1) 式に代入すれば、静電場 $E(\vec{x})[N/C]$ を得ることができます。

3.5 電気双極子

正負等量の静電荷が極めて短い距離を隔てて存在するとき、これをひとまとめにして電気双極子と言います。図のような電気双極子を考えます。A に $+q[C]$ 、B に $-q[C]$ の静電荷があり、AB の中心を O とします。AB 間の距離は $\ell[m]$ とします。O から角度 $\theta[rad]$ だけ傾き、距離 $r[m]$ 離れた点 P における静電位を求めます。 $r \gg \ell$ の場合を考えると、AP と OP と BP は平行と近似できるので、

$$AP \cong r - \frac{\ell}{2} \cos \theta$$

$$BP \cong r + \frac{\ell}{2} \cos \theta$$

です。無限遠の静電位を $0[V]$ とする基準で、静電位を表す式は、

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

なので、この電気双極子による P における静電位は、次のように計算していきます。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r - \frac{\ell}{2} \cos \theta} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q}{r + \frac{\ell}{2} \cos \theta} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{\ell}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{\ell}{2} \cos \theta} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{1 - \frac{\ell}{2r} \cos \theta} - \frac{1}{1 + \frac{\ell}{2r} \cos \theta} \right) \\ &\cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \left(1 + \frac{\ell}{2r} \cos \theta \right) - \left(1 - \frac{\ell}{2r} \cos \theta \right) \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \ell \cos \theta \end{aligned}$$

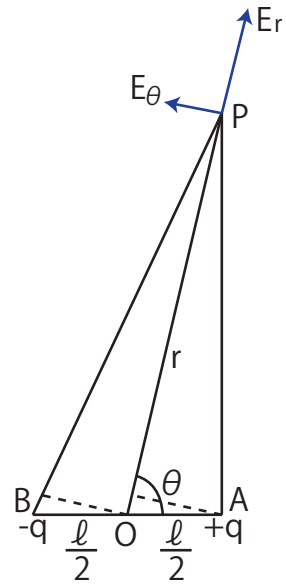


Figure 3.5: 電気双極子

したがって,

$$\phi(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (3.4)$$

となります。ただし,

$$p \equiv q\ell$$

とおきました。大きさを $p[C \cdot m]$, 向きを負電荷から正電荷に向かう方向としたベクトルを電気双極子モーメント $\vec{p}[C \cdot m]$ と言います。

静電位がわかったので、次に点 P における静電場を, (3.1) 式より $r[m]$ と $\theta[rad]$ の方向に分けて求めます。ここで, 点 P の座標を (x, y) としておくと,

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ですが, このとき,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

が成立します。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x}{r} \\ &= \frac{r \cos \theta}{r} \end{aligned}$$

$$= \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{y}{r} \\ &= \frac{r \sin \theta}{r} \end{aligned}$$

$$= \sin \theta$$

となります。また,

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

を x と y でそれぞれ偏微分して計算します.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \\ \therefore \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\cos^2 \theta \frac{r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \\ \therefore \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{x} \\ \therefore \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \cos^2 \theta \frac{1}{r \cos \theta} \\ \therefore \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned}$$

故に, 静電場 $\vec{E}(\vec{x})[N/C]$ は次のようになります.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= -\nabla\phi(\vec{x}) \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \end{aligned}$$

ここで, $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ は r 方向の単位ベクトル, $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ は θ 方向の単位ベクトルなので, P 点における静電場の r 方向と θ 方向の成分は, 次式のようにになります.

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \theta}{r^3} \end{aligned}$$

電気双極子による静電位は, (3.4) 式より, スカラー積を使うと次のように書き直すことができます.

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

(ただし, \vec{x} は電気双極子の中心 O から点 P への位置ベクトルであり, $|\vec{x}| = r$ です.) した

がって、その静電場の x 成分は次のように計算されます。

$$\begin{aligned}
 E_x(\vec{x}) &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\partial(\vec{p}\cdot\vec{x})}{\partial x} \cdot \frac{1}{r^3} + (\vec{p}\cdot\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{p_x}{r^3} + (\vec{p}\cdot\vec{x}) (-3) \frac{1}{r^4} \frac{1}{2} \frac{2x}{r} \right\} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ p_x - \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{x})x}{r^2} \right\}
 \end{aligned}$$

y 成分と z 成分も同様です。故に、静電場は、

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \vec{p} - \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{x})\vec{x}}{r^2} \right\}$$

とも表せます。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 4

導体と静電場

4.1 静電誘導

導体とは、電気を伝導する物質のことをいいます。電気を伝導しない物質は、不導体（絶縁体、誘電体）といいます。導体の代表例は金属が挙げられます。

導体には静電誘導という現象が起こります。これは、帯電体を導体に近づけたとき、導体の帯電体に近い側の端に帯電体と異符号の電荷が現れ、遠い側の端に帯電体と同符号の電荷が現れる現象です。導体が金属の場合、静電誘導の原因は自由電子の移動によるものです。静電誘導が起こると引力が働くこととなります。

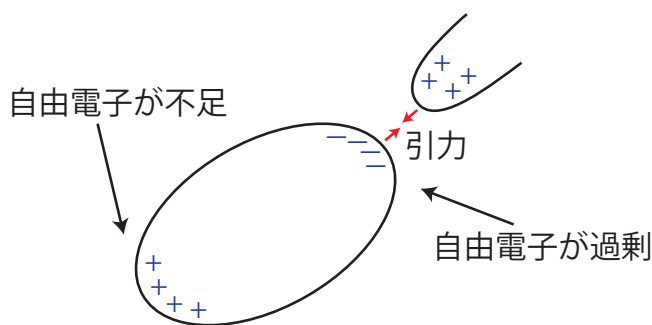


Figure 4.1: 静電誘導

4.2 導体の性質

導体は金属等、どこにでもあるようなありふれた物質ですが、電氣的に幾つの特徴のある性質をもっています。電荷の分布や電場が時間的に変化しない状態において、導体の性

質として、次の4つが挙げられます。

1. 導体内部の静電場は $0[N/C]$ です。
2. マクロに見れば導体内部に静電荷は存在しません。
3. 導体の内部，表面は等電位です。
4. 導体の外部の電気力線は導体表面と垂直に交わります。

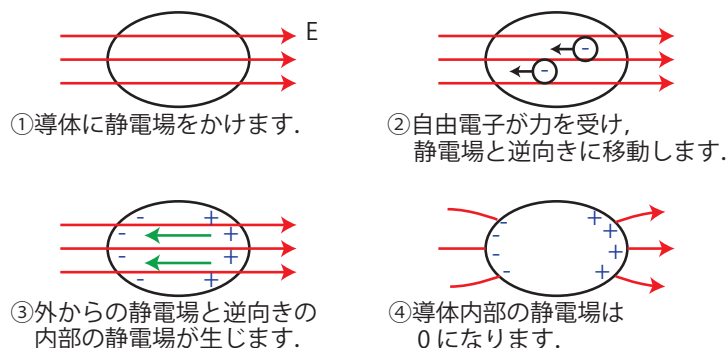


Figure 4.2: 導体内部の静電場 0

図のように、導体内部の静電場は $0[N/C]$ になります。もし、静電場が少しでも残っていれば、自由電子が力を受け、静電場と逆向きに移動し、静電場を完全に打ち消します。最終的には静電場は $0[N/C]$ に落ち着き、自由電子の移動は止まります。また、導体内部に静電荷が存在すれば、その静電荷が静電場を生じますので、静電場 $0[N/C]$ ということと矛盾します。したがって、静電荷は内部に入り込めません。表面に分布します。そして、静電場が $0[N/C]$ ということから、静電場と静電位の関係を考えると、静電位についての導体の特徴を理解することができます。つまり、静電場が $0[N/C]$ のとき、高い低いということがありませんので、静電位に差がない、つまり等電位になるのです。この性質は、後の Section で見ると、コンデンサー回路において決定的な役割をします。最後に、電気力線と等電位面は直交しますので、4番目の性質が成立します。

4.3 コンデンサー

任意の形状をした2つの導体を接近させておき、1つの導体を正に、もう1つの導体を負に帯電させると、正と負の静電荷はお互いに引き合います。この状態を静電荷が充電されたものと考えることができますが、この系をコンデンサーといいます。特に、2枚の平行な導体板からできているコンデンサーを平行板コンデンサーといいます。平行板コンデン

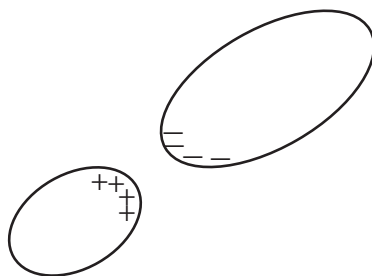


Figure 4.3: コンデンサー 1

サーが充電されているとき、極板間には一様な静電場ができています。また、今後、単にコンデンサーといった場合、平行板コンデンサーのことを意味することにします。コンデンサーに電池を接続した瞬間から、コンデンサーには充電が開始されます。コンデンサーに充電され始める瞬間は、最大の電流が流れ、コンデンサーは導線と同等の働きをします。その後、徐々に電流は小さくなり、充電が完了した後は、電流は流れなくなり、コンデンサーは不導体の働きをします。次に、充電完了したコンデンサーを電池から切り離し、抵抗に接続するとコンデンサーから電流が流れ出します。これをコンデンサーの放電といいます。放電が終わると、コンデンサーには静電荷がなくなります。

ここで、この Chapter で述べるコンデンサーおよびコンデンサー回路と、電流の Chapter で述べる電流および電流回路は、(静)電荷、静電場、静電位の3つの基礎概念によって根本的に理解することができることに注意しましょう。コンデンサー、コンデンサー回路、電流、電流回路は(静)電荷、静電場、静電位の概念についての演習問題とさせていただいて差し支えありません。

さて、電荷 $Q[C]$ が蓄えられている極板面積 $S[m^2]$ 、極板間隔 $d[m]$ の平行板コンデンサーの極板間の電位差が $\phi_{12}[V]$ の場合、これらの量の間で成立する関係を導いてみましょう。ただし、平行板コンデンサー間の静電場は一様な静電場 $E[V/m]$ です。(コンデンサーには静電荷があるので静電場が生じています。静電場があるので静電位に差ができます。この電位差は“静電位”の Chapter に出てきた電位差の概念と同一のものになります。) まず、ガウスの法則、

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

を図の緑の閉曲面に適用します。

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore Q = \epsilon_0 ES$$

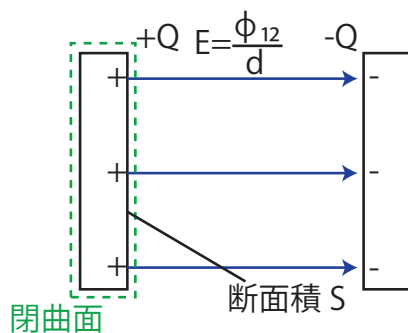


Figure 4.4: コンデンサー 2

となります。ここで、関係式、

$$E = \frac{\phi_{12}}{d}$$

より、

$$Q = \epsilon_0 \frac{\phi_{12}}{d} S$$

$$\therefore Q = \epsilon_0 \frac{S}{d} \phi_{12}$$

となります。右辺に出てくる量を、

$$C_0 \equiv \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

として、電気容量 C_0 を定義すると、

$$Q = C_0 \phi_{12}$$

が成立し、蓄えられる静電荷 $Q[C]$ は極板間の電位差 $\phi_{12}[V]$ に比例することがわかります。電気容量 $C_0[F]$ は静電荷の溜まりやすさを表し、単位は $[F] = [C/V]$ です。

4.4 コンデンサー回路

コンデンサー回路の問題解決において根本的な関係は、次に示す“コンデンサー回路を解く3つの鍵”です。

1. 電荷保存
2. 静電位の関係
3. 関係式: $Q = C_0 \phi_{12}$

鍵1の電荷保存においては、他の導体に接触していない孤立導体を探して、それに電荷保存の法則を適用します。鍵2の静電位の関係においては、導体の性質のSectionで説明したように、孤立導体が等電位であることを使います。ここで、並列回路、直列回路において成立する関係式は、この3つの鍵を用いて導くことができることに注意しましょう。また、複雑なコンデンサー回路でも、ほとんどの場合、この3つの鍵を考えれば解決することができます。

それでは、最も簡単なコンデンサー回路から話を始めましょう。最も簡単なコンデンサー回路とは、図のようにコンデンサーが1個と電池が1個だけから構成される回路です。図のように、左側の導体Aと右側の導体Bに分けて考えます。電池の部分は電解質溶液で

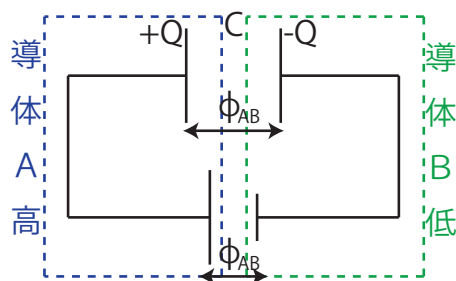


Figure 4.5: コンデンサー回路 1

満たされているので電荷は移動することができますが、電位差があるので静電位の上では左側の導体Aと右側の導体Bに分けて考えることにします。鍵1の電荷保存に関しては、この場合使用しません。鍵2の電位の関係について言及しておきます。導体の第3の性質、すなわち孤立導体は等電位であるというものから、導体Aと導体Bはそれぞれ等電位になっています。導体Aの方が高電位であり、導体Bは静電位が低い状態です。これは電池の正端子と負端子の関係からも理解できますが、コンデンサーが正に帯電している導体Aの方が高電位であり、負に帯電している導体Bの方が低電位であると把握することもできます。電池の中で電位差が生じているのは化学エネルギーのためであり、コンデンサー間に電位差があるのは一様な静電場の存在のためです。導体Aの電位と導体Bの静電位の差は電池とコンデンサーで同じになります。その理由は等電位である導体Aと等電位である導体Bの電位差が電池の部分とコンデンサーの部分で等しいからです。このことを、通常、電池の電圧がコンデンサーにかかっていると表現します。(電圧と電位差はほとんど同じ意味の用語です。) また、鍵3の関係式が成立することはいうまでもありません。

次に並列回路について成立する関係式を3つの鍵から導いておきましょう。鍵1の電荷保存はこの場合使用しません。静電荷の関係としては、2つのコンデンサーと同等な1

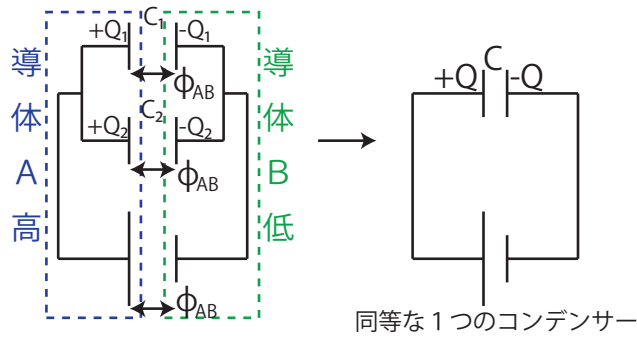


Figure 4.6: コンデンサー回路 2

つのコンデンサーを考えたとき、

$$Q = Q_1 + Q_2$$

が成立します。鍵2の静電位の関係は、左側の導体Aは等電位であり、右側の導体Bも等電位です。したがって、その電位差はコンデンサー C_1 とコンデンサー C_2 、それに電池で同じになります。そして、その電位差を $\phi_{AB}[V]$ とします。鍵3の関係は、各コンデンサーに次の関係が成立します。

$$Q = C\phi_{AB}$$

$$Q_1 = C_1\phi_{AB}$$

$$Q_2 = C_2\phi_{AB}$$

これらの式を静電荷の関係の式に代入して計算すると、

$$C\phi_{AB} = C_1\phi_{AB} + C_2\phi_{AB}$$

$$\therefore C = C_1 + C_2$$

となります。最後の式が並列回路における電気容量の合成を表す式です。

直列回路の場合も3つの鍵を用いて取り扱うことができます。鍵1の電荷保存を孤立導体Bに適用します。はじめの状態では、孤立導体Bには電荷が0[C]だったので、

$$0 = -Q_1 + Q_2$$

$$\therefore Q_1 = Q_2 (= Q)$$

の関係が成立します。鍵2の静電位の関係ですが、導体A、導体B、導体Cはそれぞれ等電位です。したがって、

$$\phi_{AC} = \phi_{AB} + \phi_{BC}$$

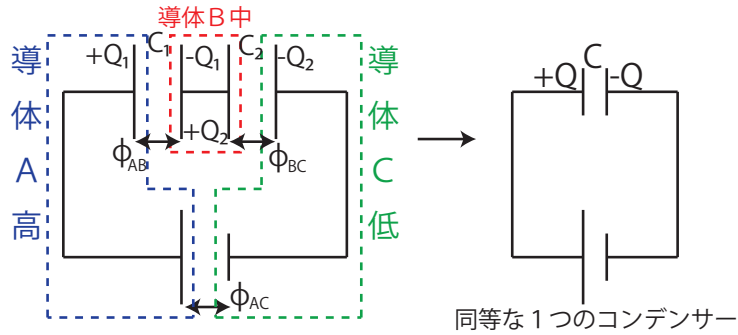


Figure 4.7: コンデンサー回路 3

の関係が成立します。鍵 3 の関係は、各コンデンサーについて式を立てると、

$$C; Q = C\phi_{AC}$$

$$C_1; Q = C_1\phi_{AB}$$

$$C_2; Q = C_2\phi_{BC}$$

となります。よって、

$$\begin{aligned}\phi_{AC} &= \frac{Q}{C} \\ \phi_{AB} &= \frac{Q}{C_1} \\ \phi_{BC} &= \frac{Q}{C_2}\end{aligned}$$

となります。これらの式を静電位の関係の式に代入して計算します。

$$\begin{aligned}\frac{Q}{C} &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \\ \therefore \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\end{aligned}$$

最後の式が直列回路における電気容量の合成を表す式です。

4.5 静電エネルギー

充電したコンデンサーは両極を導線でつなげば、放電して仕事をすることができます。したがって、充電したコンデンサーはポテンシャルをもっています。このポテンシャルを静電エネルギーと呼びます。以下に、この静電エネルギーを求めてみます。図のように、充電を行わせるために、極板 B から微小量の電荷 $\Delta q[C]$ ずつ極板 A へ運ぶ状況を考えます。電位差 $0[V]$ から始めて、ある時刻に電位差が $\phi[V]$ 、静電荷が $\pm q[C]$ の状態になったとし

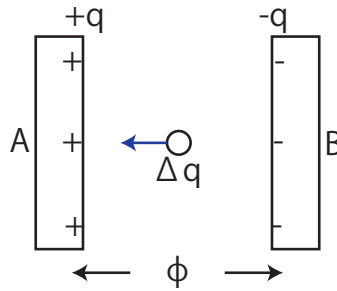


Figure 4.8: 静電エネルギー

ます. この状態のとき, さらに $\Delta q[C]$ の電荷を運ぶのに要する仕事 $\Delta W[J]$ は,

$$\Delta W = \Delta q \cdot \phi$$

となります. ここで, 電気容量を $C[F]$ として,

$$q = C\phi$$

なので,

$$\Delta W = C\Delta\phi \cdot \phi$$

と表せます. したがって, 電位差が $\phi_{AB}[V]$, 全電荷が $Q[C]$ になるまでに必要な仕事は,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\phi_{AB}} C\phi \cdot d\phi \\ &= C \left[\frac{1}{2} \phi^2 \right]_0^{\phi_{AB}} \\ &= \frac{1}{2} C \phi_{AB}^2 \end{aligned}$$

となりますが, 仕事をされた分だけ, 静電エネルギーとして蓄えられることとなります. 故に, 静電エネルギー $U[J]$ は,

$$U = \frac{1}{2} C \phi_{AB}^2 = \frac{1}{2} Q \phi_{AB} = \frac{Q^2}{2C}$$

で与えられます.

この静電エネルギーは蓄えられた静電荷の間に働くクーロン力によるポテンシャルであると考えれば, 静電荷が遠く隔たったまま力が働く遠隔作用の立場になります. しかし, “静電場 (ガウスの法則)” の Chapter で見たように, クーロン力は空間の歪みである静電場から受けるのであって, 近接作用の立場から考えなければなりません. したがって, 静電エネルギーも近接作用の観点から考えなおし, エネルギーは空間の歪みである静電場に

溜まっているとします。この立場から、静電エネルギーの式を書き直します。空間が真空の場合、平行板コンデンサーの電気容量は、

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

でした。ただし、 $\epsilon_0[F/m]$ は真空の誘電率、 $S[m^2]$ は極板の面積、 $d[m]$ は極板間隔です。故に、静電エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2}{2C} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{\epsilon_0 S} Q^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \right)^2 S d \end{aligned}$$

となります。ここで、ガウスの法則（積分形）、

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

を平行板コンデンサーに適用すると、

$$\begin{aligned} ES &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \therefore E &= \frac{Q}{\epsilon_0 S} \end{aligned}$$

となります。故に、静電エネルギーは静電場 $E[V/m]$ を使って、

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot S d$$

となります。ここで、 $S d[m^3]$ は平行板コンデンサーの体積なので、単位体積当たりの静電エネルギー $u[J/m^3]$ は、

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

となります。これが、近接作用による静電エネルギーを表した式です。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 6

定常電流と静電場

6.1 電流密度と電流保存則

電荷が移動した場合，その電荷の流れを電流といいます．電流 $I[A]$ は単位時間に移動する電荷の量であり，移動した電荷の量を $Q[C]$ として，次の関係式が成立します．

$$I = \frac{Q}{t}$$
$$Q = It$$

ここで， $t[s]$ は時間です．

電子の移動速度 $v[m/s]$ と電流の強さ $I[A]$ の関係を求めましょう．電子の電荷を $-e[C]$ ，単位体積中の電子数を $n[\text{個}/m^3]$ ，導体の断面積を $S[m^2]$ とすると， $\Delta t[s]$ 間に断面積 $S[m^2]$ を通過する電子数は $n \cdot v \Delta t S$ [個] になります．故に，電流の強さ $I[A]$ は，

$$I = \frac{e \cdot n v \Delta t S}{\Delta t}$$
$$= envS$$

となります．ここで，単位面積当たりの電流を考えて，電流密度 $i[A/m^2]$ を定義します．すなわち，

$$i \equiv \frac{I}{S}$$
$$= env$$

となります．ここで，電流密度の向きも考えて，

$$\vec{i} = env\vec{v}$$

としておきます。

一般に、電流密度は時間と位置の関数です。

$$\vec{j} = \vec{j}(t, \vec{x})$$

特に、時間に依らない場合、すなわち、

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{x})$$

のときの電流を定常電流といいます。今後、特に断らない限り、電流といえば定常電流のことを意味することにします。図のように導線を通過する電流は導線上のどの断面をとっても同じ値になります。

$$I_1 = I_2$$

したがって、

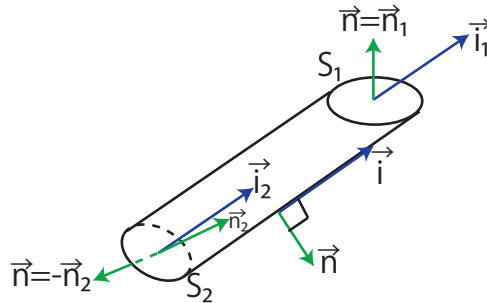


Figure 6.1: 電流保存則

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{j}_1 \cdot \vec{n}_1 dS &= \int_{S_2} \vec{j}_2 \cdot \vec{n}_2 dS \\ \therefore \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS &= \int_{S_2} \vec{j} \cdot (-\vec{n}) dS \\ \therefore \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{n} dS &= 0 \end{aligned}$$

となります。ただし、 \vec{n} は法線ベクトルです。また、側面では、

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$$

となり面積分に寄与しません。したがって、閉曲面 S (図の S_1 , S_2 と側面の全体の曲面.) について面積分すると、

$$\begin{aligned} \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS &= \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{n} dS + 0 \\ \therefore \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS &= 0 \end{aligned}$$

となります。これが電流保存則の積分形になります。ここで、ベクトル解析のガウスの定理、(\vec{A} は任意のベクトルです.)

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

より,

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{i} dV &= 0 \\ \therefore \nabla \cdot \vec{i} &= 0 \end{aligned}$$

が成立します。最後の式が電流保存則の微分形になります。

6.2 オームの法則

抵抗上の2点間の電位差を $\phi_{12}[V]$ とすると、その2点間に流れる電流の強さ $I[A]$ は電位差 $\phi_{12}[V]$ に比例します。比例定数を $1/R[1/\Omega]$ とおくと、

$$I = \frac{\phi_{12}}{R}$$

が成立します。この関係をオームの法則といいます。 R の単位は $[\Omega]$ (オーム) です。このオームの法則を簡単な電気伝導のモデルから導出してみましょう。ここで、抵抗に電位差 $\phi_{12}[V]$ がかかっている、一定の電流 $I[A]$ が流れている場合を考えます。抵抗の長さを $\ell[m]$ とすると、抵抗内の一様な電場の強さは、

$$\frac{\phi_{12}}{\ell}$$

であり、よって電子に働くクーロン力は、電気素量を $e[C]$ として、

$$e \cdot \frac{\phi_{12}}{\ell}$$

となります。この力が、速度の大きさに比例する抵抗力 $kv[N]$ ($k[kg/s]$ は比例定数) についてあります。(定常電流の場合、電子は等速運動していますので、慣性の法則が適用されます。) 故に、以下のようにオームの法則が導出されます。力のつりあいの式より、

$$\begin{aligned} e \cdot \frac{\phi_{12}}{\ell} &= kv \\ \therefore v &= \frac{e\phi_{12}}{k\ell} \end{aligned}$$

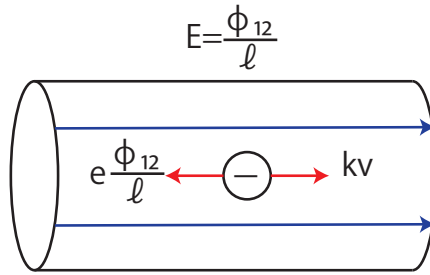


Figure 6.2: オームの法則

となります。ここで、関係式 $I = envS$ より、

$$\begin{aligned} I &= en \frac{e\phi_{12}}{k\ell} S \\ &= \frac{ne^2 S}{k\ell} \phi_{12} \\ &= \frac{\phi_{12}}{\frac{k\ell}{ne^2 S}} \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} R &\equiv \frac{k\ell}{ne^2 S} = \rho \frac{\ell}{S} \\ \rho &\equiv \frac{k}{ne^2} \end{aligned}$$

とおくと、オームの法則、

$$I = \frac{\phi_{12}}{R}$$

が成立することが確認できます。

6.3 電流回路

電流回路は抵抗と電池からなるものですが、その問題の解決において根本的な関係は、次に示す“電流回路を解く3つの鍵”です。

1. 電流保存（キルヒホッフの第一法則）
2. 電位の関係（キルヒホッフの第二法則）
3. オームの法則: $\phi_{12} = RI$

鍵1の電流保存が成立する理由は電荷保存の法則によります。回路網中の任意の一点において、“（流れ込む電流の総和）＝（流れ出す電流の総和）”という関係が成立します。鍵

2の電位の関係においては、抵抗による電位降下と、電池による起電力の分だけ電位上昇(化学エネルギーによります。)、それに理想的な導線は等電位(理想的導線とは抵抗 $0[\Omega]$ の導線のことをいいます。オームの法則で $R = 0[\Omega]$ とすると、電位差 $0[V]$ になり等電位になります。)であることに注意しましょう。これらのことにより、任意の閉回路において、“(起電力の和) = (抵抗による電位降下の和)”という関係が成立します。つまり、閉回路において、電位が電池で上がった分だけ抵抗で下がるのです。よって、一周回ると電位は元に戻ることとなります。このことは、一つの点において電位は一つの値しか持たないので当然の結論です。直列回路、並列回路において成立する関係式は、この3つの鍵を用いて導くことができます。また、複雑な電流回路でも、ほとんどの場合この3つの鍵を考えれば解決することができます。

最も簡単な電流回路から見ていきましょう。最も簡単な電流回路とは図のように、抵抗が1個と電池が1個だけから構成される回路のことをいいます。図のように、左側の導線

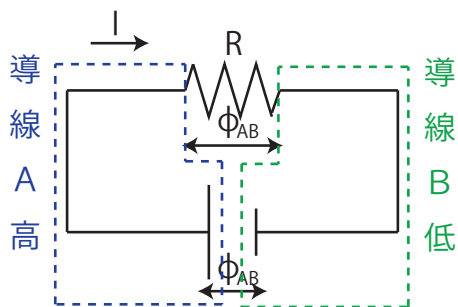


Figure 6.3: 電流回路 1

Aと右側の導線Bに分けて考えます。鍵1の電流の保存は当然成立しています。(閉回路は1つしかありません。電流は各点で同じになります。)鍵2の電位の関係について見ておきます。抵抗値 $0[\Omega]$ の理想的な導線は等電位であるということから、導線Aと導線Bはそれぞれ等電位になります。導線Aの方が高電位であり、導線Bは電位が低くなります。このことは電池の正端子と負端子の関係からも理解できますが、電流の向きからも判断できます。電池の中で電位差が生じているのは化学エネルギーのためであり、抵抗に電位差があるのは一様な電場のためです。(抵抗は導体ですが、電流が流れている状態では電位差が生じていて等電位ではありません。)導線Aと導線Bの電位差は電池と抵抗で同じです。それは等電位である導線Aと等電位である導線Bの電位差だからです。このことを、通常、電池の電圧が抵抗にかかっていると表現します。(電圧と電位差は同じことを意味する用語です。)また、鍵3のオームの法則が成立していることは明らかです。

次に直列回路について成立する関係式を、3つの鍵から導いてみましょう。鍵1の電流

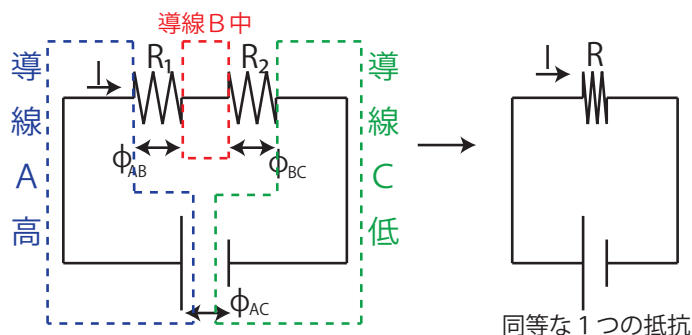


Figure 6.4: 電流回路 2

保存より,

$$I = I_1 = I_2$$

の関係が成立します。鍵 2 の電位の関係ですが、導線 A, 導線 B, 導線 C はそれぞれ等電位です。したがって,

$$\phi_{AC} = \phi_{AB} + \phi_{BC}$$

の関係が成立します。鍵 3 の関係は、各抵抗について式を立てると,

$$R : \phi_{AC} = RI$$

$$R_1 : \phi_{AB} = R_1 I$$

$$R_2 : \phi_{BC} = R_2 I$$

となります。これらの式を電位の関係の式に代入して計算します。

$$RI = R_1 I + R_2 I$$

$$\therefore R = R_1 + R_2$$

最後の式が直列回路における抵抗の合成を示す式です。

それでは、並列回路の関係について考えましょう。鍵 1 の電流保存ですが、次の関係式が成立します。

$$I = I_1 + I_2$$

鍵 2 の電位の関係は、左側の導線 A は等電位であり、右側の導線 B も等電位です。したがって、その電位差は抵抗 R_1 と抵抗 R_2 , それに電池で同じになります。そして、その電

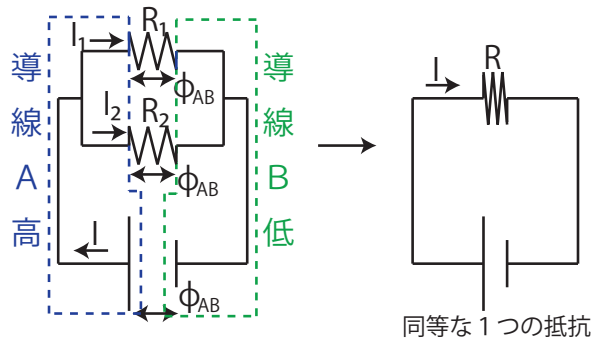


Figure 6.5: 電流回路 3

位差を $\phi_{AB}[V]$ とします。鍵 3 のオームの法則は、各抵抗について次の関係が成立します。

$$R : \phi_{AB} = RI$$

$$R_1 : \phi_{AB} = R_1 I_1$$

$$R_2 : \phi_{AB} = R_2 I_2$$

したがって、

$$I = \frac{\phi_{AB}}{R}$$

$$I_1 = \frac{\phi_{AB}}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{\phi_{AB}}{R_2}$$

と変形して、これらの式を電流保存の式に代入して計算します。

$$\frac{\phi_{AB}}{R} = \frac{\phi_{AB}}{R_1} + \frac{\phi_{AB}}{R_2}$$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

最後の式が並列回路における抵抗の合成を表す式になります。

6.4 コンデンサーと抵抗が混在する回路

コンデンサーと抵抗が混在する回路では、3つの鍵の次の対応を考えるとよいです。

1. 電荷保存 \Leftrightarrow 電流保存
2. 電位の関係 \Leftrightarrow 電位の関係
3. $Q = C_0 \phi_{12} \Leftrightarrow \phi_{12} = RI$

コンデンサー回路と電流回路は電荷と電流の違いはありますが，電場と電位の関係はよく似ています．例えば，最も簡単なコンデンサー回路（コンデンサー 1 個と電池 1 個からなる回路）と最も簡単な電流回路（抵抗 1 個と電池 1 個からなる回路）では，共にコンデンサー内または抵抗内の一様な電場によって電位差が生じています．導線部分は電流が流れなくても，流れても等電位であり，コンデンサーまたは抵抗の電位差と電池の電位差は同じになります．

6.5 ジュール熱

高電位 $\phi_2[V]$ の点から，低電位 $\phi_1[V]$ の点まで，電子 $-e[C]$ を運ぶとき，外からなすべき仕事 $W[J]$ は，

$$W = e(\phi_2 - \phi_1) = e\phi_{12}$$

となります．強さ $I[A]$ の電流は単位時間当たり $I[C]$ の電荷を運びますので，上記の 2 点間で，

$$P = I\phi_{12}$$

の仕事を単位時間当たりに行うことになります．オームの法則を使うと，

$$\begin{aligned} P &= I\phi_{12} = I \cdot RI = RI^2 \\ &= \frac{\phi_{12}}{R} \phi_{12} = \frac{\phi_{12}^2}{R} \end{aligned}$$

とも表せます．この仕事がジュール熱として発生することになります．

以上のことを微視的に取り扱ってみましょう．電荷 $-e[C]$ の電子は電場から $e\vec{E}[N]$ の力を受けながら，時間 $\Delta t[s]$ の間に，速度を $\vec{v}[m/s]$ として， $\vec{v} \cdot \Delta t[m]$ だけ動きます．したがって，この間，電場は電子に対して，

$$\Delta W = e\vec{E} \cdot \vec{v}\Delta t$$

の仕事をします．電子はこれだけの仕事を受けながら等速運動を続けて，運動エネルギーは増加しません．そして，全て熱エネルギーに変わります．単位体積中の電子の数を $n[\text{個}/m^3]$ として，単位時間に単位体積中で発生する熱は，

$$\begin{aligned} \frac{n\Delta W}{\Delta t} &= \frac{ne\vec{E} \cdot \vec{v}\Delta t}{\Delta t} \\ &= \vec{E} \cdot en\vec{v} \\ &= \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

すなわち,

$$P = \vec{E} \cdot \vec{i}$$

となります. これが, ジュール熱を微視的に表した式です.

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 7

静磁荷・静磁場・静磁位

7.1 静磁荷

静磁荷とは動いていない磁気の量のことであり、静電荷とよく似た物理量です。通常、N極を正、S極を負で表します。同極同士は反発し合い、異極同士は引き合います。静磁荷が静電荷と著しく違う点は、磁気単極子、すなわち、N極だけの静磁荷、S極だけの静磁荷は存在しないということです。N極とS極は常にペアになっています。また、静磁荷の単位には[Wb]（ウェーバ）を使います。

2つの静磁荷の間に働き合う静磁気力（クーロン力）の大きさ $F[N]$ は、次式で表されます。

$$F = k_m \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2} \quad (7.1)$$

この関係もクーロンの法則といいます。ただし、 $k_m[N \cdot m^2/Wb^2]$ はクーロンの比例定数であり、

$$k_m = \frac{10^7}{(4\pi)^2} [N \cdot m^2/Wb^2]$$

です。また、 $q_{m1}[Wb], q_{m2}[Wb]$ は静磁荷、 $r[m]$ は静磁荷の間の距離です。 $q_{m1}[Wb], q_{m2}[Wb]$ が異符号のときは引力が、同符号のときは斥力が働き合います。

7.2 静磁場

静磁荷に関するクーロンの法則(7.1)式は、そのままでは遠隔作用による表式になっています。静電場の場合と同様に、この(7.1)式を変形して近接作用の概念を式の上で表すことに

しましょう。変形は簡単です。

$$\begin{aligned} F &= k_m \frac{q_m Q_M}{r^2} \\ &= q_m \cdot k_m \frac{Q_M}{r^2} \end{aligned}$$

ここで、

$$H = k_m \frac{Q_M}{r^2} \quad (7.2)$$

とおき、これを静磁場と呼びます。このとき、

$$F = q_m H \quad (7.3)$$

が成立します。この式が近接作用の概念を式で表したものです。すなわち、静磁荷 $q_m [Wb]$ に作用するクーロン力 $F [N]$ は、空間に生じている静磁場 $H [N/Wb]$ から働きます。

静磁荷に関するクーロンの法則(7.1)式は、静電荷に関するクーロンの法則と同形になっています。したがって、静磁場に関する式(7.2)式と(7.3)式も静電場に関する式と同形になっています。故に、静電場の場合と全く同様の議論による結論を、静磁場に対しても適用することができます。静電場に関するガウスの法則(積分形)、

$$\int_S \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}) dV$$

を参照して、磁場に関して、

$$\int_S \vec{H}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \frac{1}{\mu_0} \int_V \rho(\vec{x}) dV$$

が導けます。ここで、

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{4\pi k_0} [F/m]$$

の式と同様に、

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{4\pi k_m} \\ &= \frac{1}{4\pi \frac{10^7}{(4\pi)^2}} \\ &= 4\pi \times 10^{-7} [N/A^2] \end{aligned}$$

となります。 $\mu_0 [N/A^2]$ を真空の透磁率と言います。上式をさらに変形して、

$$\int_S \mu_0 \vec{H}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \int_V \rho(\vec{x}) dV$$

とします。ここで、

$$\vec{B}(\vec{x}) \equiv \mu_0 \vec{H}(\vec{x})$$

として、静磁場に真空の透磁率を掛けた物理量を、磁束密度 $\vec{B}(\vec{x})$ として定義します。 $\vec{B}(\vec{x})$ の単位は $[T]$ (テスラ) です。このとき、

$$\int_S \vec{B}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \int_V \rho(\vec{x}) dV$$

となります。ここで、静電荷にはなかった静磁荷特有の事情として、磁気単極子は存在しないということを考えましょう。N極とS極は常にペアで存在したので、静磁荷の総量はいつも $0[Wb]$ になります。したがって、右辺の体積分は 0 になります。よって、

$$\boxed{\int_S \vec{B}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = 0} \quad (7.4)$$

という静磁場に関するガウスの法則（積分形）が成立します。

ベクトル解析のガウスの定理、つまり、任意のベクトル $\vec{A}(\vec{x})$ について、

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV = \int_S \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS$$

が成立したことを思い出します。(7.4) 式は、

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) dV = 0$$

となります。ここで、被積分関数が 0 になりますので、

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0} \quad (7.5)$$

という、静磁場に関するガウスの法則（微分形）が成立します。

7.3 静磁位

静電荷・静電場・静電位の関係と同じように、静磁荷・静磁場・静磁位の関係が存在します。静磁位とは、静磁場に対する高低の概念をポテンシャルで表した物理量です。静電位の Chapter で通常の高低の概念が重力によるポテンシャルの大小によって表されることを見ましたが、それを復習しておきます。

普通、高いとか低いとかいう概念は重力が働いている場合に使います。物体は重力を受けて、自然に高いところから低いところへ移動します。もし、重力が働かない無重力状態にいれば、高低の概念は成立しないこととなります。通常、高さは地面からの距離で測りますが、その代わりにポテンシャル $mgh[J]$ をもちいても表すことができます。つまり、 $mgh[J]$ が大きい程高いということになります。特に、質量 $m[kg]$ の重みを除いた $gh[m^2/s^2]$ の部分が高さを表すと考えてよいでしょう。

点電荷の周りの静電位について復習しておきます。簡単のため、2つの点電荷がともに正の場合を取り扱います。点電荷 $Q[C]$ の周りに電場が生じているとします。ここで、点

電荷 $q[C]$ を置くとクーロン力が働き自然に移動しますが, 高い方から低い方へ動くと考えます. すなわち, 点電荷 $Q[C]$ に近い方が高く, 遠い方が低くなります. この高低をポテンシャルで表します. 万有引力の場合と同じように, 次の計算を行います.

$$\begin{aligned} V(A) - V(\infty) &= W'_{A \rightarrow \infty} \\ &= \int_A^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} dr \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_A^\infty \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r_A} \end{aligned}$$

ここで, 無限遠をポテンシャルの基準として, $V(\infty) = 0[J]$ とすると, 距離 $r[m]$ におけるポテンシャルは次式になります.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

この式を $q[C]$ の重みと, 残りの高さを表す量, すなわち静電位 $\phi(r)[V]$ に分解します. ($V(r) = q\phi(r)$.) ここで,

$$V(r) = q \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

より, 静電位 $\phi(r)[V]$ は次式になります.

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

同様の議論により, 静磁荷 $Q_M[Wb]$ による静磁位は,

$$\phi_m(r) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{Q_M}{r}$$

となります.

静電場と静電位の間関係式,

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\phi(\vec{x})$$

と同様に, 静磁場と静磁位の間には,

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\nabla\phi_m(\vec{x})$$

が成立します. ここで, A 点から B 点まで静磁場を線積分して計算していきます.

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_A^B \{-\nabla\phi_m(\vec{x})\} \cdot d\vec{x} \\ &= - \int_A^B \left\{ \frac{\partial\phi_m(\vec{x})}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi_m(\vec{x})}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi_m(\vec{x})}{\partial z} dz \right\} \\ &= - \int_A^B d\phi_m \\ &= \phi_m(A) - \phi_m(B) \end{aligned}$$

したがって,

$$\int_A^B \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \phi_m(A) - \phi_m(B)$$

が成立します.

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 8

アンペール力とローレンツ力

8.1 アンペール力

静磁場中で定常電流が流れると力を受けます。この力をアンペール力といいます。定常電流と静磁場が垂直の場合、アンペール力の向きに関して、フレミングの左手の法則が成立します。すなわち、左手の3つの指をそれぞれ垂直になるようにして、中指が定常電流の向き、人差し指が静磁場の向き、親指がアンペール力の向きです。このときのアンペール

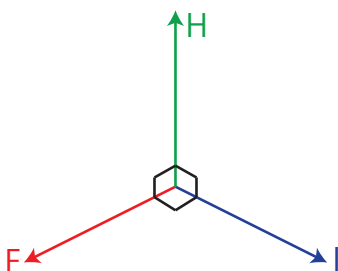


Figure 8.1: アンペール力 1

力の大きさ $F[N]$ は、定常電流の強さ $I[A]$ 、静磁場の強さ $H[A/m]$ 、導線の長さ $\ell[m]$ に比例します。すなわち、

$$F = \mu_0 I H \ell = I B \ell$$

と表されます。ただし、

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [N/A^2]$$

は比例定数の真空の透磁率であり、磁束密度 $B[T]$ には、

$$B = \mu_0 H$$

の関係があります。定常電流と静磁場が θ の角をなすときは、静磁場 $H[A/m]$ に垂直な導線の長さ $\ell \sin \theta [m]$ がアンペール力の大きさ $F[N]$ に関係します。したがって、アンペール力の大きさ $F[N]$ は、

$$F = \mu_0 I H \ell \sin \theta = I B \ell \sin \theta$$

となります。一般にアンペール力の大きさと向きを含めて、ベクトルを使って表すと、

$$\vec{F} = \mu_0 I \vec{\ell} \times \vec{H} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$$

となります。ただし、ベクトル積を使いました。ここで、導線の長さを微小にとり、 $I \Delta \vec{s} [A \cdot m]$ で表される電流素片というものを考えましょう。このとき、電流素片から生じた微小なアンペール力 $\Delta \vec{F} [N]$ は次式で表されます。

$$\Delta \vec{F} = I \Delta \vec{s} \times \vec{B}$$

微小量を限りなく 0 に近づけると、次式が成立します。

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B} \quad (8.1)$$

アンペール力の一つの例として、2本の平行電流間に働く力を考えましょう。導線 Q に

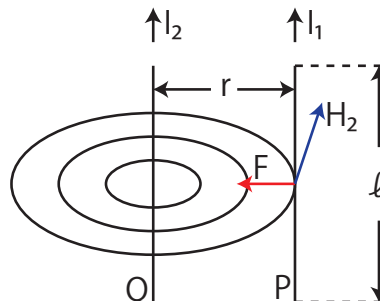


Figure 8.2: アンペール力 2

流れる定常電流が導線 P の位置でつくる静磁場の大きさ $H_2[A/m]$ は、

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi r}$$

です。静磁場の向きは右ねじの法則により、図のように生じることがわかります。したがって、導線 P の長さ $\ell [m]$ の部分が受ける力の大きさ $F[N]$ は、

$$\begin{aligned} F &= \mu_0 I_1 H_2 \ell \\ &= \mu_0 I_1 \frac{I_2}{2\pi r} \ell \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \frac{I_1 I_2 \ell}{2\pi r} \\ &= 2 \times 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{r} \ell \end{aligned}$$

となります。力の向きはフレミングの左手の法則より引力となります。導線 P に流れる定常電流が導線 Q に及ぼす引力の大きさも同じ最後の式になります。(定常電流の向きがお互いに逆向きときは斥力が働きます。) 最後の式を利用して定常電流の単位 $[A]$ を定義します。

定義 8.1 (定常電流の単位) “ $1[A]$ とは、真空中で $1[m]$ 隔てて平行に置かれた 2 本の導線に同じ強さの定常電流を流したとき、導線どうしが及ぼし合う力の大きさが $1[m]$ あたり、 $2 \times 10^{-7}[N]$ のときの定常電流の強さとします。”

8.2 ローレンツ力

定常電流が静磁場の中で力を受けるということは、定常電流は荷電粒子の流れですので、その荷電粒子 1 つ 1 つに力がかかっていることとなります。静磁場中で運動する 1 個の荷電粒子が受ける力をローレンツ力といいます。磁束密度 $B[T]$ の中で電荷 $q[C]$ の荷電粒子が受けるローレンツ力を、アンペール力の表式 (8.1) 式、

$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B}$$

から導出しましょう。定常電流の大きさは、

$$I = qnvS$$

でした。ここで、 $n[1/m^3]$ は単位体積中の荷電粒子の数、 $v[m/s]$ は荷電粒子の速度、 $S[m^2]$ は導線の断面積です。故に、

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= Id\vec{s} \times \vec{B} \\ &= qnvS \cdot d\vec{s} \times \vec{B} \\ &= nS ds \cdot q\vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

となります。ここで、 $nS ds[\text{個}]$ は荷電粒子の数なので、ローレンツ力は、

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

と求められます。また、静磁場と静電場が生じているときに運動する荷電粒子が受ける力は次式で表されます。

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}} \quad (8.2)$$

実際に、荷電粒子静磁場中に初速度 $v[m/s]$ で打ち込むと、進行方向に対して常に垂直にローレンツ力がかかり、粒子は等速円運動をします。向心力の役目をしているのは、ロー

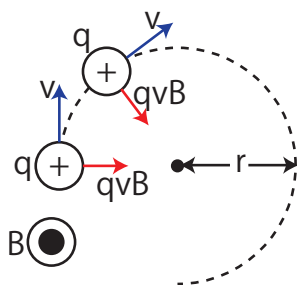


Figure 8.3: ローレンツ力

レンツ力です．ここで，磁束密度 $B[T]$ は図の紙面の裏から表向きにかかっている場合を考えています．円の中心方向への運動方程式の大きさの関係より，次のように円の半径が求められます．

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{r} &= qvB \\ \therefore mv^2 &= qvBr \\ \therefore r &= \frac{mv}{qB} \end{aligned}$$

また，周期 $T[s]$ も計算されます．

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi r}{v} \\ &= \frac{2\pi mv}{v qB} \\ &= \frac{2\pi m}{qB} \end{aligned}$$

周期は荷電粒子の速さに依存しないことがわかります．

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 9

定常電流の静磁場（ビオ-サバールの法則とアンペールの法則）

9.1 定常電流の静磁場の3つの例

定常電流が流れるとその周りに静磁場が生じます。幾つかの簡単な場合について、それぞれ成立する実験式を見ておきましょう。第一の例として無限に長い直線定常電流 $I[A]$ のつくる静磁場を挙げます。静磁場は直線定常電流を中心として同心円状をなし、定常電流の進む向きをねじの進む向きにして、右にねじった向きに生じます。（これを右ねじの法則といいます。）そのときの静磁場の強さ $H(r)[A/m]$ は、

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

で表されます。ただし、 $r[m]$ は直線定常電流からの距離です。

第二の例として、円形定常電流 $I[A]$ のつくる静磁場を挙げます。この場合、生じる静磁場は向きも強さも各点で異なっていて複雑です。しかし、円の中心では、静磁場の向きは円を含む面に垂直であり、静磁場の強さ $H(r)[A/m]$ は、円形定常電流の半径を $r[m]$ として、

$$H(r) = \frac{I}{2r}$$

と表されます。右手で円形定常電流を握り、中指の向きが定常電流の向きとすると、親指の向きが静磁場の向きになります。

第三の例として、無限に長いソレノイドコイルに流れる定常電流 $I[A]$ のつくる静磁場を挙げます。導線を円筒状に密に巻いたソレノイドに定常電流を流したとき、ソレノイドの内部につくる静磁場は、ソレノイドの軸に平行で強さはどこでもほぼ同じになります。

このように、各点の静磁場の向きと大きさが等しい静磁場を一様な静磁場といいます。右手でソレノイドを握り、中指の向きが定常電流の向きとすると、親指の向きが静磁場の向きになります。一様な静磁場の強さ $H[A/m]$ は、ソレノイドの太さに関係なく、

$$H = nl$$

で表されます。ただし、 $n[1/m]$ は長さ $1[m]$ 当たりの導線の巻き数です。

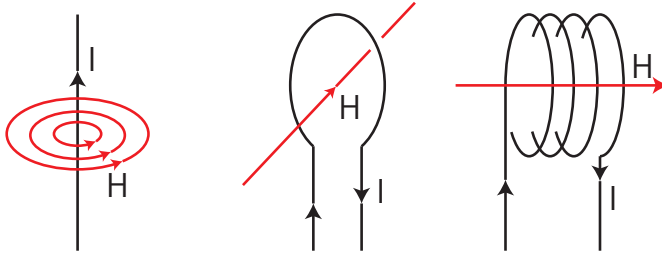


Figure 9.1: 3つの例

9.2 ビオ-サバールの法則

前 Section で挙げた例の実験式を導出するものとして、一般に、ビオ-サバールの法則というものが成立します。その法則は次式で表されます。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{R}}{r^3} \quad (9.1)$$

ここで、 $Id\vec{s}[A \cdot m]$ は導線を通る電流の微小な区間のベクトルである電流素片、 $\vec{R}[m]$ は電流素片 $Id\vec{s}[A \cdot m]$ とある点 P を結ぶ変位ベクトル ($r = |\vec{R}[m]|$)、 $\vec{x}[m]$ は原点 O からある点 P への位置ベクトル、 $\vec{s}[m]$ は原点 O と電流素片を結ぶ変位ベクトル、そして、 $d\vec{B}[T]$ は電流素片 $Id\vec{s}[A \cdot m]$ が、ある点 P につくる磁束密度です。 $\vec{R}[m]$ と $\vec{x}[m]$ の違いに注意して下さい。位置ベクトル $\vec{x}[m]$ はビオ-サバールの法則 (9.1) 式の中には、直接は出てきません。 $(\vec{R} = \vec{x} - \vec{s})$ を代入することはできます。

ここで、ビオ-サバールの法則 (9.1) 式を導出しておきましょう。図の点 P に静磁荷 $q_m[Wb]$ を置きます。このとき、この静磁荷が $d\vec{s}[m]$ の部分につくる静磁場は、

$$-\frac{q_m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\vec{R}}{r^3}$$

となります。このとき、磁束密度は、

$$-\frac{q_m}{4\pi} \cdot \frac{\vec{R}}{r^3}$$

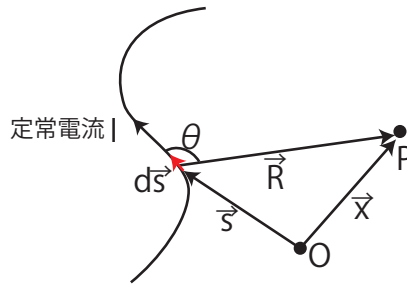


Figure 9.2: ビオ-サバールの法則 1

になります。アンペール力の式、(アンペール力については、Chapter “アンペール力とローレンツ力” を見て下さい。)

$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B}$$

より、この静磁場のため $d\vec{s}[m]$ の部分は、

$$Id\vec{s} \times \left(-\frac{q_m}{4\pi} \cdot \frac{\vec{R}}{r^3} \right) = -q_m \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{R}}{r^3}$$

の力を受けます。ここで、作用・反作用の法則より、点 P にある静磁荷 $q_m[Wb]$ は、

$$q_m \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{R}}{r^3}$$

の力を受けますが、このことから点 P に、

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{R}}{r^3}$$

の静磁場が生じていることがわかります。したがって、点 P に生じる磁束密度は、

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{R}}{r^3}$$

となります。この式は (9.1) 式です。(導出終。)

ビオ-サバールの法則 (9.1) 式より、前 Section の 3 つの例の静磁場の強さを表す式を導いておきましょう。まず、無限に長い直線電流のつくる静磁場を取り扱います。図のように状況を設定します。 $r[m]$ の定義に注意して下さい。ビオ-サバールの法則 (9.1) 式の $r[m]$ に相当するものは、ここでは $\sqrt{r^2 + z^2}$ になります。ここで、ビオ-サバールの法則 (9.1) 式、

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{R}}{r^3}$$

より、電流素片 $Idz[A \cdot m]$ のつくる点 P における磁束密度の大きさ $dB[T]$ は、

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idz \sqrt{r^2 + z^2} \sin \theta}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta \cdot dz}{r^2 + z^2} \end{aligned}$$

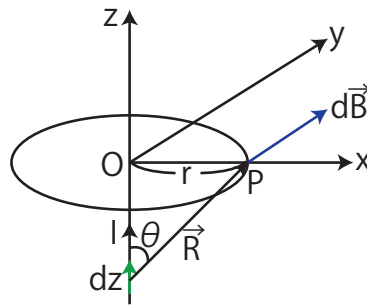


Figure 9.3: ビオ-サバルの法則 2

となります。図より、

$$-z = r \cot \theta$$

$$\sqrt{r^2 + z^2} = \frac{r}{\sin \theta}$$

です。故に、

$$dz = -r \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

$$= \frac{rd\theta}{\sin^2 \theta}$$

ですので、

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \frac{rd\theta}{\sin^2 \theta}}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sin \theta \cdot d\theta$$

となります。電流は無限に長いので、上式を θ について $0[\text{rad}]$ から $\pi[\text{rad}]$ まで積分して磁束密度の大きさを求めます。

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^\pi \sin \theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [-\cos \theta]_0^\pi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

よって、

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

が求められました。

次に、円形電流のつくる静磁場を求めましょう。状況は図の通りです。 $r[m]$ の定義に注意して下さい。ビオ-サバールの法則 (9.1) 式の $r[m]$ に相当するものは、ここでは $\sqrt{d^2 + r^2}$ になります。円周上の点 M に電流素片 $Id\vec{s}[A \cdot m]$ があり、それがつくる微小な磁束密度

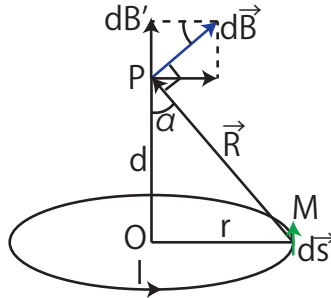


Figure 9.4: ビオ-サバールの法則 3

$d\vec{B}[T]$ は OP と OM を含む面内にあって、 PM に垂直になっています。この $d\vec{B}[T]$ を、 OP 方向の成分 $dB'[T]$ と、 OM に平行な成分に分けて考えます。ここで、 $ds[m]$ について積分すると、 OM に平行な成分は合成して $0[T]$ になります。したがって、 $d\vec{B}[T]$ を合成したものは、 $dB'[T]$ を加え合わせたものに等しくなります。故に、点 P の磁束密度 $\vec{B}[T]$ は OP の方向で、その大きさはビオ-サバールの法則 (9.1) 式、

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{R}}{r^3}$$

より、次式のように計算されます。

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi r} \frac{Ids \sqrt{d^2 + r^2} \sin \frac{\pi}{2}}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \sin \alpha \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d^2 + r^2} [s]_0^{2\pi r} \sin \alpha \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d^2 + r^2} 2\pi r \frac{r}{\sqrt{d^2 + r^2}} \end{aligned}$$

故に、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{r^2}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9.2)$$

となります。ここで、円の中心の点 O を考え、 $d = 0[m]$ を代入すると、

$$\begin{aligned} B(r) &= \frac{\mu_0 I}{2r} \\ \therefore H(r) &= \frac{I}{2r} \end{aligned}$$

となり、円形電流の中心での静磁場の大きさを表す式が導出されました。

例の最後の無限に長いソレノイドコイルの中心軸上の静磁場を求めましょう。まず、ソレノイドコイルの中心軸上に z 軸をとります。 $dz[m]$ の部分の巻き数は ndz [回] なので、この部分に流れる電流の強さは $In \cdot dz[A]$ です。この電流が z 軸上の点 P につくる磁束密度は、少し上の (9.2) 式より、

$$dB = \frac{\mu_0 In \cdot dz}{2} \cdot \frac{r^2}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

これをソレノイドコイル全体にわたって積分すると、

$$B = \frac{\mu_0 n I r^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ですが、ここで、 $z = r \tan \phi$ と変数変換します。このとき、

$$\begin{aligned} z^2 + r^2 &= r^2(\tan^2 \phi + 1) \\ &= \frac{r^2}{\cos^2 \phi} \end{aligned}$$

と、

$$dz = \frac{rd\phi}{\cos^2 \phi}$$

が成立するので、磁束密度は次のように計算されます。

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 n I r^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{rd\phi}{\cos^2 \phi}}{\frac{r^3}{\cos^3 \phi}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} [\sin \phi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \mu_0 n I \end{aligned}$$

したがって、中心軸上での静磁場の強さは、

$$H = nI$$

となることが導出されました。

9.3 磁気双極子

“静電位”の Chapter の “電気双極子”の Section の議論を思い出しましょう。電気双極子の中心からの距離 $r[m]$ 、なす角 $\theta[rad]$ の位置における静電位 $\phi[V]$ は次式で表されました。ただし、2つの静電荷は $\pm q[C]$ 、静電荷間の距離は $\ell[m]$ です。

$$\phi(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (p \equiv q\ell)$$

ここで、大きさを $p[\text{C} \cdot \text{m}]$ 、向きを負電荷から正電荷に向かう方向としたベクトルを電気双極子モーメント $\vec{p}[\text{C} \cdot \text{m}]$ といいました。電位から r 方向と θ 方向の静電場を求めると次のようになりました。

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3}$$

また、電気双極子による静電位は、スカラー積を使うと次のように書き直すことができます。

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

この式から、静電場は、

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \vec{p} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{x})\vec{x}}{r^2} \right\}$$

とも表されます。

磁気の場合も電気の場合と同様に議論することができます。わずかに離れた正負2つの点状の静磁荷 $\pm q_m[\text{Wb}]$ がつくる磁気双極子の磁位は電気双極子の場合と全く同じ計算により、次式のようにになります。

$$\phi_m(r, \theta) = \frac{m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (m \equiv q_m \ell)$$

ここで、大きさを $m[\text{Wb} \cdot \text{m}]$ 、向きを負磁荷から正磁荷に向かう方向としたベクトルを磁気双極子モーメント $\vec{m}[\text{Wb} \cdot \text{m}]$ といいます。静磁位から r 方向と θ 方向の静磁場を求めると次のようになります。

$$H_r = -\frac{\partial\phi_m}{\partial r} = \frac{m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{2\cos\theta}{r^3}$$

$$H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi_m}{\partial\theta} = \frac{m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3}$$

また、磁気双極子による静磁位は、スカラー積を使うと次のように書き直すことができます。

$$\phi_m(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{4\pi\mu_0 r^3}$$

したがって、電気双極子のつくる静電場を表す式と全く同様に、磁気双極子のつくる静磁場は、

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0 r^3} \left\{ \vec{m} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{x})\vec{x}}{r^2} \right\} \quad (9.3)$$

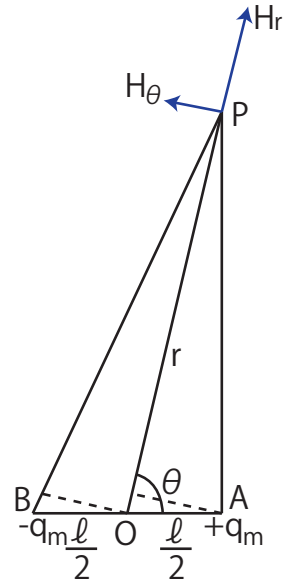


Figure 9.5: 磁気双極子 1

とも表されます。

以上の議論は，ペアとなる静磁荷により磁気双極子を形成した場合です．磁気双極子を形成するもう一つの方法として，閉じた定常電流を考えることができます．ここでは特別な例として，一辺の微小な長さ $a[m]$ の正方形の4辺の上を流れる定常電流を取り扱い，ビオ-サバールの法則 (9.1) 式，

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{R}}{r^3}$$

より，その電流回路がつくる静磁場を求めてみましょう．図のように正方形の回路を $ABCD$

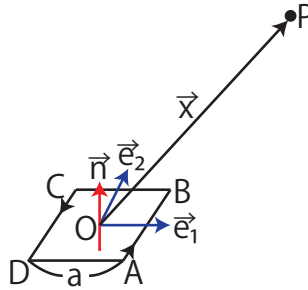


Figure 9.6: 磁気双極子 2

とし，辺 DA と辺 AB に平行な単位ベクトルを \vec{e}_1, \vec{e}_2 とします．また，正方形の法線ベクトルを \vec{n} とします．各電流素片が点 P につくる磁束密度は，それぞれ次のようになります．

$$\begin{aligned} AB: & \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot a\vec{e}_2 \times (\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_1)}{|\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_1|^3} \\ BC: & \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot (-a\vec{e}_1) \times (\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_2)}{|\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_2|^3} \\ CD: & \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot (-a\vec{e}_2) \times (\vec{x} + \frac{a}{2}\vec{e}_1)}{|\vec{x} + \frac{a}{2}\vec{e}_1|^3} \\ DA: & \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot a\vec{e}_1 \times (\vec{x} + \frac{a}{2}\vec{e}_2)}{|\vec{x} + \frac{a}{2}\vec{e}_2|^3} \end{aligned}$$

ここで， AB について，

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_1|^2 &= (\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_1) \cdot (\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_1) \\ &\cong r^2 - a(\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \end{aligned}$$

なので (ただし, $r = |\vec{x}|$),

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_1|^{-3} &\cong \{r^2 - a(\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\}^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{r^3} \{1 - \frac{a(\vec{x} \cdot \vec{e}_1)}{r^2}\}^{-\frac{3}{2}} \\ &\cong \frac{1}{r^3} \{1 + \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_1}{r^2}\} \end{aligned}$$

となります. BC, CD, DA についても同様です. したがって, 各電流素片がつくる磁束密度の和は次のようになります.

$$\begin{aligned} B(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \{ \vec{e}_2 \times (\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_1) \frac{1}{r^3} (1 + \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_1}{r^2}) - \vec{e}_1 \times (\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{e}_2) \frac{1}{r^3} (1 + \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_2}{r^2}) \\ &\quad - \vec{e}_2 \times (\vec{x} + \frac{a}{2}\vec{e}_1) \frac{1}{r^3} (1 - \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_1}{r^2}) + \vec{e}_1 \times (\vec{x} + \frac{a}{2}\vec{e}_2) \frac{1}{r^3} (1 - \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_2}{r^2}) \} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \{ \vec{e}_2 \times \vec{x} - \frac{a}{2} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + (\vec{e}_2 \times \vec{x}) \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_1}{r^2} - \frac{3}{4} (\frac{a}{r})^2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \\ &\quad - \vec{e}_1 \times \vec{x} + \frac{a}{2} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \times \vec{x}) \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_2}{r^2} + \frac{3}{4} (\frac{a}{r})^2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) (\vec{x} \cdot \vec{e}_2) \\ &\quad - \vec{e}_2 \times \vec{x} - \frac{a}{2} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + (\vec{e}_2 \times \vec{x}) \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_1}{r^2} + \frac{3}{4} (\frac{a}{r})^2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \\ &\quad + \vec{e}_1 \times \vec{x} + \frac{a}{2} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \times \vec{x}) \frac{3a}{2} \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_2}{r^2} - \frac{3}{4} (\frac{a}{r})^2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) (\vec{x} \cdot \vec{e}_2) \} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} [a(-\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + \frac{3a}{r^2} \{ (\vec{e}_2 \times \vec{x}) (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) - (\vec{e}_1 \times \vec{x}) (\vec{x} \cdot \vec{e}_2) \}] \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} [2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \frac{3}{r^2} \{ -\vec{e}_1 (\vec{x} \cdot \vec{e}_2) + \vec{e}_2 (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \} \times \vec{x}] \end{aligned}$$

ここで, 最後の式の $\{ \}$ の中を x 成分について計算します.

$$\begin{aligned} \{ \}_x &= -e_{1x}(e_{2x}x + e_{2y}y + e_{2z}z) + e_{2x}(e_{1x}x + e_{1y}y + e_{1z}z) \\ &= (e_{1z}e_{2x} - e_{1x}e_{2z})z - (e_{1x}e_{2y} - e_{1y}e_{2x})y \\ &= (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)_y z - (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)_z y \\ &= \{ (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{x} \}_x \end{aligned}$$

となります. y, z 成分の同様なので,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} [2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \frac{3}{r^2} \{ (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{x} \} \times \vec{x}] \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} [2\vec{n} + \frac{3}{r^2} \{ (\vec{n} \times \vec{x}) \times \vec{x} \}] \end{aligned}$$

となります。ここで、最後の式の $\{ \}$ の中を x 成分について計算します。

$$\begin{aligned} \{ \}_x &= (\vec{n} \times \vec{x})_y z - (\vec{n} \times \vec{x})_z y \\ &= (n_z x - n_x z) z - (n_x y - n_y x) y \\ &= (n_x x + n_y y + n_z z) x - n_x (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \{ (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{x} - r^2 \vec{n} \}_x \end{aligned}$$

となります。 y, z 成分も同様なので、

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} \left[2\vec{n} + \frac{3}{r^2} \{ (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{x} - r^2 \vec{n} \} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} \left\{ -\vec{n} + \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{r^2} \right\} \end{aligned}$$

となります。ここで、微小な正方形の面積を、 $\Delta S \equiv a^2$ とおきます。このとき、

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 I \Delta S}{4\pi r^3} \left\{ \vec{n} - \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{r^2} \right\}$$

となります。よって、静磁場は、

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{x}) &= -\frac{I \Delta S}{4\pi r^3} \left\{ \vec{n} - \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{r^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi \mu_0 r^3} \left[(\mu_0 I \cdot \Delta S \cdot \vec{n}) - \frac{3\{\mu_0 I \cdot \Delta S (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{x}\}}{r^2} \right] \end{aligned}$$

となります。ここで、2つの静磁荷がペアになっている磁気双極子のつくる静磁場の (9.3) 式と見比べてみると、磁気双極子モーメントが、

$$\vec{m} = \mu_0 I \cdot \Delta S \cdot \vec{n}$$

に相当していることがわかります。つまり、閉じた正方形の電流回路も磁気双極子の役割をしているのです。このときの静磁場は、

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi \mu_0 r^3} \left[\vec{m} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{r^2} \right]$$

となり、前述の2つの静磁荷がペアになっている磁気双極子の場合の (9.3) 式と完全に一致します。したがって、閉じた電流回路も磁気双極子と呼ぶことにします。また、上に述べたのは正方形の閉回路の場合でしたが、円形電流、長方形の電流等、閉回路一般について磁気双極子モーメントの式は成立することがわかっています。

9.4 アンペールの法則

定常電流 $I[A]$ が流れている閉曲線 C' があるとし、定常電流と静磁場の関係を考えましょう。そのため、 C' を縁とする任意の曲面 S' をとり、この S' を網目に分けて、個々の網目

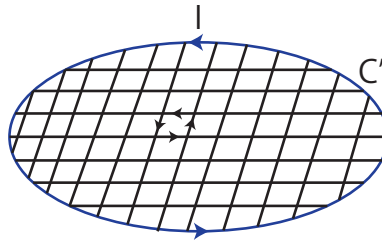


Figure 9.7: アンペールの法則 1

にはそれぞれ定常電流 $I[A]$ が流れていると仮定します。隣り合う二つの網目があるとき、その共通部分では、それぞれ逆向きの定常電流が流れているので打ち消し合うこととなります。全ての網目で共通部分がないところは縁を流れる定常電流だけであり、この部分の寄与だけが残ります。したがって、閉曲線 C' を流れる定常電流がつくる静磁場は、個々の網目の定常電流がつくる静磁場の総和に等しくなります。個々の網目の定常電流は前の Section で述べたような磁気双極子になっています。この網目の定常電流による磁気双極子モーメントは、

$$\vec{m} = \mu_0 I \cdot \Delta S \cdot \vec{n}$$

でした。そして、網目の定常電流がつくる静磁位は、

$$\Delta\phi_m(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{r^3}$$

に磁気双極子モーメントの式を代入して、

$$\begin{aligned} \Delta\phi_m &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\mu_0 I \cdot \Delta S (\vec{n} \cdot \vec{x})}{r^3} \\ &= \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\Delta S \cdot \cos\theta}{r^2} \\ &= \frac{I\Delta\omega}{4\pi} \end{aligned}$$

となります。ただし、

$$\Delta\omega \equiv \frac{\Delta S \cdot \cos\theta}{r^2}$$

は立体角です。通常の角度は半径 1 の円の円弧の長さで表します。したがって、半径を $r[m]$ 、弧の長さを $s[m]$ としたとき、角 $\theta[rad]$ は、

$$\theta = \frac{s}{r}$$

になります。立体角とは、半径 1 の球の球面の一部の面積で表されるものです。半径を $r[m]$ 、球面の一部の面積を $S[m^2]$ とすると、立体角 $\omega[sr]$ （ステラジアン）は、

$$\omega = \frac{S}{r^2}$$

です。

網目の定常電流がつくる回路において、定常電流の向きを右にねじり、ねじの進む向きにある点 P の立体角の符号を正、反対向きにある点 P の立体角の符号を負と約束します。“静磁荷・静磁場・静磁位”の Chapter で見たように、静磁場と静磁位の間には次の関係が成立します。

$$\int_A^B \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \phi_m(A) - \phi_m(B)$$

したがって、閉回路の定常電流による磁気双極子モーメントがつくる静磁場は次式になります。

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \frac{I\Delta\omega(A)}{4\pi} - \frac{I\Delta\omega(B)}{4\pi} \\ &= \frac{I}{4\pi} \{\Delta\omega(A) - \Delta\omega(B)\} \end{aligned}$$

ここで、図の3つの場合における定常電流のつくる静磁場を求めてみましょう。 C' は定常

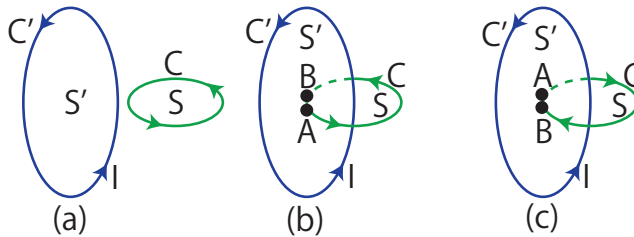


Figure 9.8: アンペールの法則 2

電流の閉曲線、 S' は C' が囲む閉曲面、 C は磁場の閉曲面、 S は C が囲む閉曲面です。(a) 図の場合では、 C が S' を貫通せず、立体角は連続的に変化して、

$$\oint_C \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0$$

となります。左辺の線積分の記号は経路が閉じていることを示す積分記号です。(b) 図の場合では、 C が S' を貫通して始点 A と終点 B の間では、特別な状況になっています。(A と B の間に S' があり、 A と B の間の距離は無微小です。) 定常電流の向きを右にねじり、ねじの進む向きにある点 P の立体角の符号を正、反対向きにある点 P の立体角の符号を負と約束しましたので、 $\Delta\omega(A)$ が正、 $\Delta\omega(B)$ が負で、それぞれ大きさは半径 1 の半球の面積である $2\pi[sr]$ になります。したがって、

$$\Delta\omega(A) = 2\pi$$

$$\Delta\omega(B) = -2\pi$$

なので,

$$\int_A^B \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \frac{I}{4\pi} \{2\pi - (-2\pi)\}$$

$$\therefore \oint_C \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = I$$

となります. (c) 図の場合では, $\Delta\omega(A)$ が負, $\Delta\omega(B)$ が正で, それぞれ大きさは半径 1 の半球の面積である $2\pi[\text{sr}]$ になります. したがって,

$$\Delta\omega(A) = -2\pi$$

$$\Delta\omega(B) = 2\pi$$

なので,

$$\int_A^B \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \frac{I}{4\pi} \{(-2\pi) - 2\pi\}$$

$$\therefore \oint_C \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -I$$

となります. 一般に, 定常電流の向きに右ねじをねじり, ねじの向きに閉曲線 C がある場合には右辺は正, 逆向きの場合には右辺は負になります. 複数の定常電流があるときには,

$$\oint_C \vec{H}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \sum_j I_j$$

となります. ただし, 右辺の定常電流でカウントするのは, 閉曲線 C が定常電流のつくる閉曲面 S' を貫通するときのみとし, 定常電流の向きに右ねじをねじり, ねじの向きに閉曲線 C がある場合には定常電流の前の符号を正, 逆向きの場合には定常電流の前の符号を負とします. 磁束密度に関しては,

$$\oint_C \vec{B}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \mu_0 \sum_j I_j \quad (9.4)$$

となります. この関係をアンペールの法則といいます.

“ビオ-サバールの法則” の Section において, 3つの例について定常電流のつくる静磁場を表す式を導きましたが, ここでは, アンペールの法則 (9.4) 式を用いて, 無限に長い直線電流のつくる磁場を表す式と, ソレノイドコイルの電流のつくる磁場を表す式を再度導出しておきましょう. まず, 無限に長い直線電流のつくる磁場を求めます. ビオ-サバールの法則より, 磁束密度は円の接線方向であることがわかります. ここで, アンペールの法則 (9.4) 式を使うと,

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\therefore H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

と、確かに導出されます。次に、ソレノイドコイルの電流のつくる磁場を求めます。図はソ

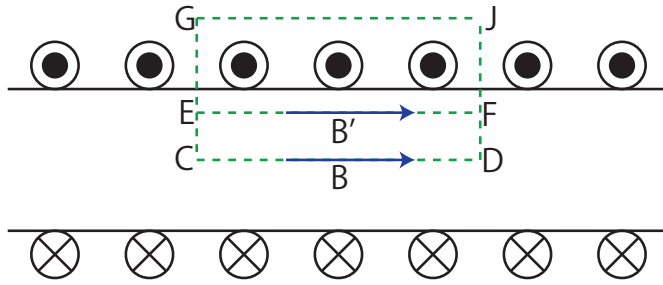


Figure 9.9: アンペールの法則 3

レノイドコイルの中心線を含む断面図です。ソレノイドは無限に長いものとします。図の上部における定常電流は紙面の裏から表向きに、下部における定常電流は紙面の表から裏向きに流れるものとします。閉曲線 C として、 $CDFEC$ をとると、アンペールの法則 (9.4) 式より、

$$B \cdot CD - B' \cdot EF = 0$$

$$\therefore B = B'$$

となります。すなわち、ソレノイドコイル内の磁束密度は一定です。閉曲線 C として $CDJGC$ をとると、ソレノイド外部の磁束密度は打ち消し合って $0[T]$ なので、アンペールの法則 (9.4) 式より、

$$B \cdot CD = \mu_0 I \cdot nCD$$

$$\therefore B = \mu_0 nI$$

$$\therefore H = nI$$

と、確かに導出されます。

最後に、電流密度 $i(\vec{x})[A/m^2]$ を使って、アンペールの法則 (9.4) 式を変形します。アンペールの法則（積分形）は、

$$\oint_C \vec{B}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \mu_0 \int_S \vec{i}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS \quad (9.5)$$

となります。ここで、ベクトル解析のストークスの定理、任意のベクトル $\vec{A}(\vec{x})$ に対して、

$$\int_S \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \oint_C \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

より、(9.5) 式は、

$$\int_S \nabla \times \vec{B}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \mu_0 \int_S \vec{i}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS$$

となります。被積分関数同士が等しくなりますので、

$$\boxed{\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})} \quad (9.6)$$

が成立します。(9.6) 式をアンペールの法則（微分形）といいます。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 11

電磁誘導（ファラデーの法則）

11.1 ファラデーの電磁誘導の法則

磁石をコイルに近づけたり遠ざけたりすると、コイルに電流が流れます。この現象を電磁誘導といいます。電磁誘導による起電力を誘導起電力、その電流を誘導電流といいます。電磁誘導を取り扱うために、新しく磁束 Φ [Wb] という物理量を次式で定義します。

定義 11.1 (磁束 Φ) $\Phi \equiv BS$

直観的に磁束とは、磁場を束ねた物理量です。ここで、 B [T] は磁束密度、 S [m^2] は磁束密度に垂直な断面積を表します。この式から磁束密度という名前の由来がわかると思います。つまり、 B [T] は、単位面積当たりの磁束になっています。また、 $[T] = [Wb/m^2]$ の関係があります。電磁誘導を磁束という言葉で言い直すと、

- “磁束が変化すると誘導起電力が発生します。”

と表現されます。また、誘導起電力の向きに関しては、

法則 11.1 (レンツの法則) “誘導電流は、磁束の変化を妨げる向きに流れます。”

というレンツの法則が成立します。図を見て下さい。最も簡単な電磁誘導の例を挙げています。図の青い線が磁石の磁束密度を表し、緑の線が誘導電流による磁束密度を表しています。左側の例では磁石を近づけると磁束密度が強くなり、下向きの磁束が増加します。それを妨げるため上向きの磁束が生じるように誘導電流が流れます。親指が、生じる磁束の向きと同じ、上向きになるようにして右手でコイルを握り、中指の向きの誘導電流が流れることとなります。右側の例では磁石を遠ざけると磁束密度が弱くなり、下向きの磁束が減少します。それを妨げるため下向きの磁束が生じるように誘導電流が流れます。親指が、

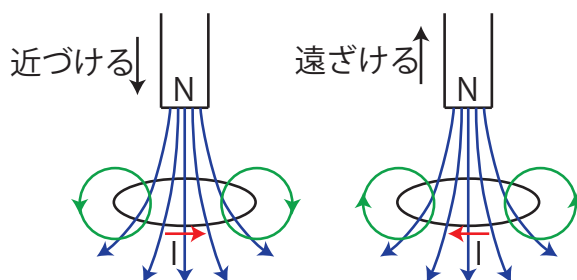


Figure 11.1: 電磁誘導 1

生じる磁束の向きと同じ、下向きになるようにして右手でコイルを握り、中指の向きの誘導電流が流れることとなります。誘導起電力の大きさに関しては、

法則 11.2 (ファラデーの電磁誘導の法則) “誘導起電力の大きさは、磁束の単位時間当たりの変化量に比例します。”

というファラデーの電磁誘導の法則が成立します。誘導起電力の向きと大きさを次式で表します。

$$\phi_{em} = -k \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

ここで、 k は比例定数であり、正の値をとります。また、右辺の負符号はレンツの法則、つまり磁束の変化と妨げるように誘導起電力が生じることを示しています。 $\Delta t[s]$ を限りなく 0 に近づける極限をとると、ファラデーの電磁誘導の法則は次式になります。

$$\phi_{em} = -k \frac{d\Phi}{dt}$$

電磁誘導の典型的な次の例として、磁場中で動く導体棒を取り上げましょう。上の磁石が動く例では、磁束密度 $B[T]$ が変わり磁束が変化しました。すなわち、

$$\Delta\Phi = \Delta B \cdot S$$

でした。今度の磁場中で動く導体棒の場合は、磁束密度は一定ですが回路の面積 $S[m^2]$ が変わり磁束が変化します。この場合は、

$$\Delta\Phi = B \cdot \Delta S$$

の関係になります。磁場中を動く導体棒の状況は図の通りです。一様な磁束密度 $B[T]$ が上向きにかかっている、その中を長さ $\ell[m]$ の導体棒が速さ $v[m/s]$ で右向きに引っ張られて運動しています。このとき、 $\Delta t[s]$ の間に回路の面積が、

$$\Delta S = \ell \cdot v \Delta t$$

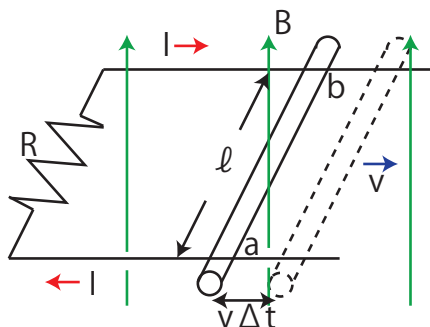


Figure 11.2: 電磁誘導 2

だけ増すので、回路を貫く磁束は上向きに、

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= B \cdot \Delta S \\ &= B\ell v\Delta t\end{aligned}$$

だけ増加します。レンツの法則より、磁束の変化を妨げるように下向きの磁束が生じるように誘導電流が流れます。右手で回路を握り、親指を下にすると中指の向きが誘導電流の向きになります。したがって、導体棒中では図の b から a の向きへ誘導電流が流れます。この場合、導体棒は電池の役目をしているので、静電位は a の方が b よりも高くなります。これは、導体棒中で静電位が低い b から静電位の高い a へ、エネルギーを与え、電流を押し流していることを意味します。ファラデーの電磁誘導の法則、

$$\phi_{em} = -k \frac{d\Phi}{dt}$$

より、誘導起電力は、

$$\begin{aligned}\phi_{em} &= -k \frac{B\ell v\Delta t}{\Delta t} \\ &= -kvB\ell\end{aligned}$$

となります。負符号は誘導起電力の向きを表すので、その大きさは、

$$\phi_{em} = kvB\ell \tag{11.1}$$

となります。

同じ現象をローレンツ力によっても説明できることを見ておきましょう。図のように 1 本の導体棒が単独で上向きの一様な磁束密度 $B[T]$ の中を動いています。棒の中には電流の担い手としての自由電子があり、これが棒とともに動いているので、電子は磁束密度からローレンツ力を受けます。電子の電荷を $-e[C]$ とし、1 個の電子が受けるローレンツ

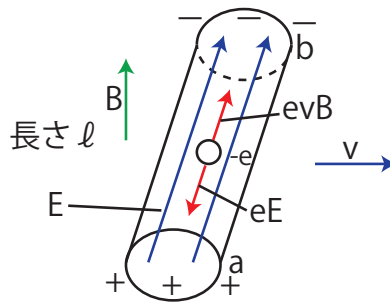


Figure 11.3: 電磁誘導 3

力を求めましょう。負の電荷をもつ電子が右に動いているので、電流が左に流れていると考えることができます。フレミングの左手の法則より、ローレンツ力の向きは a から b の向きです。そして、その大きさは $evB[N]$ で与えられます。この力を受けて電子が移動するため、 b 端では電子が過剰になって負に、 a 端では電子が不足して正に帯電し、棒の中には a から b の向きに電場が生じます。この電場の強さを $E[N/C]$ とすると、電子は b から a の向きに $eE[N]$ のクーロン力を受けます。ここで、電流は一定に流れるので、電子は等速運動をしています。したがって、慣性の法則より、ローレンツ力とクーロン力はつりあうので、

$$evB = eE$$

$$\therefore E = vB$$

となります。故に、 ab 間の電位差は、 $\phi_{12} = Ed$ より、

$$\phi_{em} = E\ell$$

すなわち、

$$\phi_{em} = vB\ell \quad (11.2)$$

となります。これが誘導起電力になります。(11.1) 式と (11.2) 式を比較すると、 $k = 1$ となることがわかります。故に、ファラデーの電磁誘導の法則は、

$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11.3)$$

となることが理解されます。実はそれだけではなく、ファラデーの電磁誘導の法則の磁束の磁束密度 $B[T]$ と、ローレンツ力の磁束密度 $B[T]$ が同一のものであることが、ここで判明するのです。これは重要な理論的事実です。

この磁場中で動く導体棒について、エネルギー保存則の関係が成立することも見ておきましょう。状況は図の通りです。力関係は、外力 $F[N]$ と誘導電流によるアンペール力

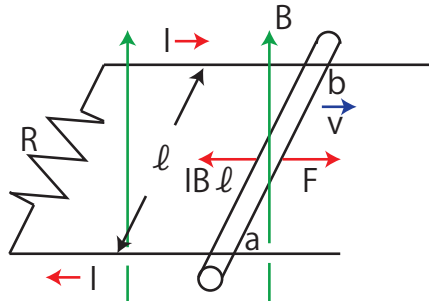


Figure 11.4: エネルギー保存則

$IBl[N]$ (フレミングの左手の法則より, この場合左向き.) がつりあっています. つまり,

$$F = IB\ell$$

です. ここで, 外力がする仕事率 $P[W]$ は, $P = Fv$ より,

$$\begin{aligned} P &= (IB\ell)v \\ &= I(vB\ell) \\ &= I\phi_{ab} \\ &= I(RI) \\ &= RI^2 \end{aligned}$$

となります. これは, 外力がした仕事の分だけ, 抵抗でジュール熱が発生していることを表しています. つまり, エネルギー保存則が成立していることがわかります. もちろん, エネルギー保存則は, この磁場中で動く導体棒の例だけでなく, 電磁誘導の現象一般に成立します.

ファラデーの電磁誘導の法則を一般化しておきましょう. 磁束 $\Phi[Wb]$ は, 磁束密度と断面積が垂直でない場合と磁束密度が一様でない場合も含めて, 次の式で定義されます.

定義 11.2 (磁束 2) $\Phi(t) = \int_S \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS$

ただし, $\vec{n}(\vec{x})$ は法線ベクトルです. また, 起電力 $\phi[V]$ は電場が回路 C の 1 周にわたって単位電荷になす仕事なので,

$$\phi_{em} = \oint_C \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

となります. したがって, (11.3) 式,

$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

は、

$$\oint_C \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS \quad (11.4)$$

となります。この (11.4) 式をファラデーの電磁誘導の法則（積分形）といいます。ここで、ベクトル解析のストークスの定理、

$$\int_S \nabla \times \vec{A}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \oint_C \vec{A}(t, \vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

より、(11.4) 式は、

$$\int_S \nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS$$

となります。ここで、両辺の被積分関数が等しいので、

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} \quad (11.5)$$

が成立します。(11.5) 式をファラデーの電磁誘導の法則（微分形）といいます。

11.2 自己誘導

一つのコイルに流れる電流が変化すると、この電流によってつくられていた磁場が変化して、このコイルを貫く磁束が変わります。このために、このコイルの中に誘導起電力が発生します。この現象を自己誘導といいます。コイルの電流を $I[A]$ とし、 $I[A]$ のためにコイルを貫く磁束を $\Phi[Wb]$ とすれば、 $\Phi[Wb]$ は $I[A]$ に比例します。ここで、比例定数を $L[H]$ （ヘンリー）とすると、

$$\Phi = LI$$

の関係が成立します。 $L[H]$ のことを自己インダクタンスといいます。電流 $I[A]$ が減少するとき、磁束 $\Phi[Wb]$ も減少するので、レンツの法則より、電流 $I[A]$ を減らさない向きに誘導起電力が発生します。逆に、コイルの電流 $I[A]$ が増加するときには、それを増やさない向きに起電力がコイルに生じます。自己インダクタンス $L[H]$ が大きいコイル程、自己誘導の現象は顕著になります。

それでは、ここで、コイルの自己インダクタンスを表す式を求めておきましょう。コイルの単位長さ当たりの巻き数を $n[\text{回}/m]$ 、長さを $l[m]$ 、断面積を $S[m^2]$ とします。このとき、コイル内部の磁場 $H[A/m]$ は、“定常電流の静磁場（ビオ-サバルの法則とアンペールの法則）”の Chapter で見たように、

$$H = nl$$

で与えられます。よって、磁束密度は、 $B = \mu_0 H$ より、

$$B = \mu_0 n I$$

となります。ひと巻きのコイルを貫く磁束は $\Phi = BS$ なので、コイルの総巻き数は $n\ell$ [回] より、コイル全体を貫く磁束は、

$$\begin{aligned}\Phi &= n\ell \cdot BS \\ &= n\ell \cdot \mu_0 n I \cdot S \\ &= \mu_0 n^2 S \ell \cdot I\end{aligned}$$

です。ここで、

$$\Phi = LI$$

なので、

$$L = \mu_0 n^2 S \ell$$

が自己インダクタンスを表す式になります。

自己誘導による誘導起電力 ϕ [V] を表す式を求めてみましょう。ファラデーの電磁誘導の法則、

$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

に、

$$\Phi = LI$$

を代入して、

$$\phi_{em} = -L \frac{dI}{dt}$$

となります。電流の時間変化の割合が大きいほど、自己インダクタンスが大きいほど誘導起電力は大きくなります。

ここで、自己インダクタンス L [H] のコイル、 R [Ω] の抵抗、起電力 ϕ [V] の電池とスイッチを直列につないだ回路を考えます。これを RL 回路といいます。図に示します。スイッチを入れたとき、自己誘導が起こり、ゆっくりと電流が流れ始め、最終的には一定の電流が流れるようになります。このことを微分方程式で取り扱ってみましょう。時刻 t [s] に流れる電流を $I(t)$ [A] とすると、コイルには、

$$\phi_{em} = -L \frac{dI(t)}{dt}$$

の誘導起電力が生じるので、抵抗には、

$$\phi - L \frac{dI(t)}{dt}$$

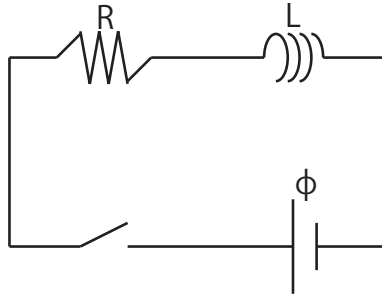


Figure 11.5: 自己誘導 1

の電位差がかかることになります。ここで、オームの法則を抵抗に適用すると、

$$RI(t) = \phi - L \frac{dI(t)}{dt}$$

ですから、

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = \phi \quad (11.6)$$

となります。(11.6) 式は定数係数の常微分方程式であり、一般論にしたがって、右辺を 0 とおいた同次方程式の解 $I_0(t)$ に、(11.6) 式を満たす特解 $I_1(t)$ を加えたものが一般解になります。まず、同次方程式を次のように解きます。

$$\begin{aligned} L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) &= 0 \\ \therefore \frac{dI(t)}{dt} &= -\frac{R}{L} I(t) \\ \therefore \frac{dI(t)}{I(t)} &= -\frac{R}{L} dt \\ \therefore \int \frac{dI(t)}{I(t)} &= -\frac{R}{L} \int dt \\ \therefore \log |I(t)| &= -\frac{R}{L} t + C \quad (C : \text{const}) \\ \therefore |I(t)| &= e^{-\frac{R}{L} t + C} \\ \therefore I(t) &= \pm e^C \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \end{aligned}$$

ここで、 $A \equiv \pm e^C$ とおき、 $I(t)$ を $I_0(t)$ とおき直すと、

$$I_0(t) = Ae^{-\frac{R}{L} t}$$

となります。次に特解 $I_1(t)$ ですが、これを定数であると仮定します。このとき、(11.6) 式より、

$$\begin{aligned} L \cdot 0 + RI_1 &= \phi \\ \therefore I_1 &= \frac{\phi}{R} \end{aligned}$$

と求められます。よって、一般解は、

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\phi}{R}$$

となります。ここで、スイッチを入れた瞬間、電流が $0[A]$ の場合を考えます。すなわち、初期条件を $t = 0[s]$ で $I = 0[A]$ とします。このとき、

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot 1 + \frac{\phi}{R} \\ \therefore A &= -\frac{\phi}{R} \end{aligned}$$

と定数 A が決定します。故に、解は、

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{\phi}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\phi}{R} \\ \therefore I(t) &= \frac{\phi}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \end{aligned}$$

となります。この式は、スイッチを入れた後、時間の経過につれ、電流が $0[A]$ から $\frac{\phi}{R}[A]$ にだんだん近づいていく様子を表しています。 $I-t$ グラフを描くと図のようになります。

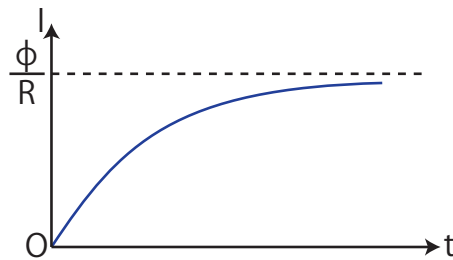


Figure 11.6: 自己誘導 2

一定の電流 $\frac{\phi}{R}[A]$ が流れていて、スイッチを切った場合も考えてみましょう。このとき、微分方程式は (11.6) 式において電池の起電力 $\phi = 0[V]$ としたものになります。よって、微分方程式は同次方程式になり、その解は上の議論により、

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

となります。一定の電流 $\frac{\phi}{R}[A]$ が流れている状態で、スイッチを切った瞬間 $t = 0[s]$ における電流の値は $\frac{\phi}{R}[A]$ なので、これを初期条件とすると、以下のように定数 A が決まります。

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{R} &= A \cdot 1 \\ \therefore A &= \frac{\phi}{R} \end{aligned}$$

故に、解は、

$$I(t) = \frac{\phi}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

です。スイッチを切った後、電流は時間の経過とともに減少していることがわかります。

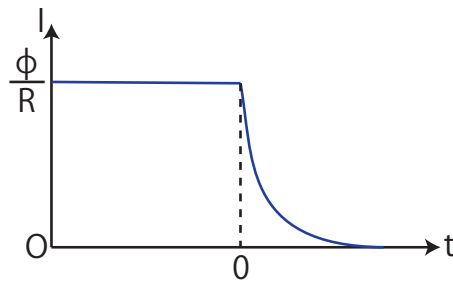


Figure 11.7: 自己誘導 3

11.3 静磁エネルギー

前の Section の最後で見たように、RL 回路において一定の電流が流れている状態でスイッチを切った後も、しばらくの間電流が流れて仕事を行うことができます。これは、電流が流れているコイルにポテンシャルが溜まっているために起こる現象です。このポテンシャルを静磁エネルギーといいます。以下に、この静磁エネルギーを求めてみます。

RL 回路において、抵抗が $R = 0[\Omega]$ の場合を考えます。スイッチを入れて電流を流し始めるとき、自己誘導が起こりますが、その誘導起電力は、

$$\phi_{em} = -L \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}$$

です。ここで、コイルは導線からできていますので抵抗が $0[\Omega]$ であることに注意すると、外からかかっている電位差は、

$$L \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}$$

になります。この電位差のもとで、短い時間 $\Delta t[s]$ の間に $I(t) \cdot \Delta t[C]$ の微小量の電荷が移動します。このとき、外からする微小な仕事 $\Delta W[J]$ は、関係式 $W = \pm |q|\phi_{12}$ を使って、(この場合、外から仕事をして電流を押し流しているの、正の仕事になります。)

$$\Delta W = I(t)\Delta t \cdot L \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}$$

となります。スイッチを閉じた時刻 $0[s]$ における電流 $0[A]$ から始めて、ある時刻 $T[s]$ に電流 $I[A]$ になったときを考えます。ある時刻 $T[s]$ において、電流は定常状態になっていて一定の値をとるようになっていてもよいし、あるいはそれより以前の状態で電流が増加している状態でもよいです。この間になされた仕事を時刻 $0[s]$ から $T[s]$ まで積分して求

めます。(ここで、短い時間 $\Delta t[s]$ を限りなく $0[s]$ に近づける極限をとります。)

$$\begin{aligned} W &= L \int_0^T I(t) \frac{dI(t)}{dt} dt \\ &= L \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{I(t)^2\} dt \\ &= \frac{L}{2} [I(t)^2]_0^T \\ &= \frac{1}{2} LI(T)^2 \\ &= \frac{1}{2} LI^2 \end{aligned}$$

この外からなされた仕事をされた分だけ、静磁エネルギーとして蓄えられたこととなります。故に、静磁エネルギー $U[J]$ は、

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

で与えられます。ここで、 $I[A]$ は一定の状態になっている場合もあれば、増加している状態のときもあり、どちらにしても、その瞬間の電流の値です。(電流の変化があまり速くない場合を考えて、その瞬間においては静磁場が生じているとします。)

以上の議論はコイルに蓄えられた静磁エネルギーがポテンシャルであるという遠隔作用の立場から説明しました。コイルの静磁エネルギーは、コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーと対比されるものですが、そのときと同じように、近接作用の立場から捉えなおしてみます。つまり、静磁エネルギーは空間の歪みである磁場に蓄えられていると考えられます。前の Section で求めたように、コイルの自己インダクタンスは、

$$L = \mu_0 n^2 S \ell$$

でした。したがって、静磁エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} LI^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S \ell I^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 (nI)^2 S \ell \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 H^2 S \ell \end{aligned}$$

となります。ここで、 $S \ell [m^3]$ はコイルの体積なので、単位体積当たりの静磁エネルギー $u[J/m^3]$ は、

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \tag{11.7}$$

となります。さらに変形して、

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{B}{\mu_0} \right)^2$$

ですから,

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (11.8)$$

です. (11.7) 式と, (11.8) 式が近接作用による静磁エネルギーを表した式です.

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 12

交流

12.1 交流発電機

家庭で使用されている電気は交流です。交流は、電流の向きが周期的に交互に入れ替わります。抵抗一つと交流電源一つからなる簡単な交流回路において、一方の向きを正の向きと約束すると、抵抗の両端の電位差や流れる電流を表す横軸時間のグラフは正弦曲線になります。正弦曲線になる理由は、交流電源の仕組みを考えると理解できます。

交流電源は通常、交流発電機でできています。その原理を説明します。交流発電機では、一様な磁束密度 $B[T]$ の中で外から力を加え、コイルを一定の角速度 $\omega[rad/s]$ で回転させます。(簡単のため、コイルはひと巻きであるとします。また、コイルが磁束密度と垂直な状態で時刻 $t = 0[s]$ とします。) コイルの面積を $S[m^2]$ とすると、コイルの磁束密度と垂直な面積は、 $S \cdot \cos \omega t [m^2]$ と周期的に変化します。(図を見て下さい。) このとき、コイル

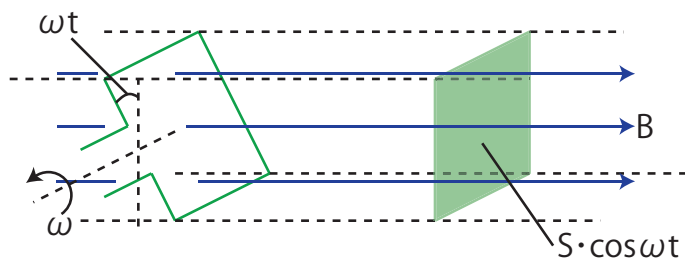


Figure 12.1: 交流発電機

を貫く磁束 $\Phi(t)[Wb]$ は、

$$\Phi(t) = B \cdot S \cos \omega t$$

と周期的に変化します。磁束が変化すると電磁誘導が起こり、誘導起電力が発生します。

ファラデーの電磁誘導の法則,

$$\phi_{em}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

より,

$$\begin{aligned}\phi(t) &= -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) \\ &= -BS(-\omega \sin \omega t) \\ &= BS \omega \sin \omega t\end{aligned}$$

となります。ここで、起電力の絶対値の最大値を、 $\phi_0 \equiv BS \omega$ とおくと、

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t$$

と交流発電機の起電力を表す式が求められます。確かに、グラフは正弦曲線になることが確認されます。

交流の起電力の周期 $T[s]$ は、コイルの回転の周期に等しくなっています。交流の $1[s]$ 当たりの振動の回数,

$$f = \frac{1}{T}$$

を周波数といいます。周波数 f の単位は $[Hz(\text{ヘルツ}) (= 1/s)]$ です。また、 $\omega[rad/s]$ は交流の角周波数といますが、コイルの回転の角速度に等しくなっています。ここで、

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

の関係があります。

12.2 R回路

交流電源に抵抗を1つ繋いだだけの回路をR回路と呼ぶことにします。前のSectionの交流発電機の起電力がそのまま抵抗にかかります。すなわち、抵抗の電位差 $\phi(t)[V]$ は、

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t$$

です。電位差が変化する場合でも、その瞬間その瞬間の電位差と電流を考えることができます。その瞬間その瞬間の電位差や電流の値を瞬時値といいます。電位差と電流の瞬時値について、オームの法則が成立するので、抵抗を流れる電流 $I(t)[A]$ は、

$$\begin{aligned}I(t) &= \frac{\phi(t)}{R} \\ &= \frac{\phi_0}{R} \sin \omega t\end{aligned}$$

となります。ここで、電流の最大値を、

$$I_0 \equiv \frac{\phi_0}{R}$$

とおくと、

$$I(t) = I_0 \sin \omega t$$

となります。ここで注意することは、電位差と電流の位相が揃っていることと、電位差の最大値と電流の最大値の間にもオームの法則が成立することです。

抵抗に交流が流れるとき、ジュール熱が発生します。その電力の瞬時値 $P(t)[W]$ は時間とともに変化しますが、次のようになります。

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)\phi(t) \\ &= I_0 \sin \omega t \cdot \phi_0 \sin \omega t \\ &= I_0 \phi_0 \sin^2 \omega t \end{aligned}$$

故に、電力の時間平均値を $P[W]$ とすると、周期を $T[s]$ として、

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \cdot I_0 \phi_0 \sin^2 \omega t \\ &= \frac{I_0 \phi_0}{T} \int_0^T dt \cdot \sin^2 \omega t \\ &= \frac{I_0 \phi_0}{T} \int_0^T dt \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \\ &= \frac{I_0 \phi_0}{T} \left[\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_0^T \\ &= \frac{I_0 \phi_0}{T} \cdot \frac{T}{2} \\ &= \frac{1}{2} I_0 \phi_0 \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$P = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}$$

と変形し、電流や電位差の實際上、電力に寄与する量として、

$$\begin{aligned} I_e &\equiv \frac{I_0}{\sqrt{2}} \\ \phi_e &\equiv \frac{\phi_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

を定義します。これらを電流や電位差の実効値といいます。このとき、

$$P = I_e \phi_e$$

の関係が成立することがわかります。また、これらの実効値の間には、

$$\begin{aligned}\frac{\phi_e}{I_e} &= \frac{\frac{\phi_0}{\sqrt{2}}}{\frac{I_0}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\phi_0}{I_0} \\ &= R\end{aligned}$$

より、実効値に関するオームの法則、

$$\phi_e = RI_e$$

が成立します。結局、R 回路では、瞬時値、最大値と実効値の3種類の量に関して、オームの法則が成立することがわかりました。

12.3 L 回路

交流電源にコイルを1個だけ繋いだ回路をL回路と呼ぶことにします。コイルに交流が流れるとき、自己誘導の起電力がコイルに生じます。この起電力は電流の変化を妨げる向きに発生するので、交流電流を抑制する働きをもちます。L回路において、コイルの導線の抵抗は無視できるものとします。このとき、コイルの両端の電位差は0[V]になります。つまり、交流電源の起電力 $\phi(t)[V]$ と、自己誘導の起電力、

$$-L \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}$$

がつりあうことになります。すなわち、

$$\begin{aligned}\phi(t) + \left(-L \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}\right) &= 0 \\ \therefore \phi(t) &= L \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}\end{aligned}$$

が成立します。時間間隔が限りなく0近づく極限をとると、

$$\phi(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

となります。ここで、コイルを流れる交流電流が、

$$I(t) = I_0 \sin \omega t$$

と変化したとすると、コイルに交流電源からかかる電位差 $\phi(t)[V]$ は、

$$\begin{aligned}\phi(t) &= L \frac{d}{dt}(I_0 \sin \omega t) \\ &= \omega LI_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

となります。ここで、電位差の最大値を、 $\phi_0 \equiv \omega LI_0$ とおき、三角関数の公式を使うと、

$$\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

となります。つまり、電流の位相は電位差の位相より、 $\frac{\pi}{2}[\text{rad}]$ だけ小さい（遅れている）ことがわかります。（位相のずれのため、L回路では、瞬時値に関するオームの法則は成立しません。）この位相の関係は計算によって導かれましたが、その意味を直観的に考察しましょう。コイルに直流電源を繋ぎ、スイッチを入れた場合を考えます。スイッチを入れた瞬間、コイルには電源の起電力がかかり、最大限の外からの電位差がかかることとなります。一方、自己誘導の起電力が逆向きに生じています。コイルの抵抗が無視できるものとする、コイルにかかっている全体の電位差はオームの法則より 0[V] になります。この瞬間において、電流は 0[A] です。自己誘導が起こったとき、スイッチを入れた後、ゆっくりと電流は流れ始めるのでしたね。つまり、電位差（電源からの電位差です。）が先行し、電流は後からついてくることとなります。今考えたことは、直流電源でスイッチを入れた瞬間の場合でした。流れ始めの位相の関係は交流でも同様で、その後の位相の関係もそのまま引き継ぐこととなります。

また、上に出てきた、

$$\phi_0 = \omega LI_0$$

は最大値に関するオームの法則を表しています。ここで、

$$\omega L$$

という物理量は抵抗に相当するもので、リアクタンスといいます。さらに変形して、

$$\frac{\phi_0}{\sqrt{2}} = \omega L \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \phi_e = \omega LI_e$$

となります。この式は実効値に関するオームの法則を示しています。

次に、L回路における消費電力を考えてみましょう。消費電力の瞬時値 $P(t)[W]$ を計算すると、

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)\phi(t) \\ &= I_0 \sin \omega t \cdot \phi_0 \cos \omega t \\ &= \frac{I_0 \phi_0}{2} \sin 2\omega t \end{aligned}$$

となります。この式から、時刻 0[s] から、一周期後の時刻 $T[s]$ までの時間平均 $P[W]$ を計

算してみます.

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\
 &= \frac{I_0 \phi_0}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t \cdot dt \\
 &= \frac{I_0 \phi_0}{2T} \left[-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

つまり, 消費電力の時間平均は $0[J]$ です. エネルギーはコイルと交流電源の間を行き来していることとなります. ここで, コイルに蓄えられているエネルギーの瞬時値 $U(t)[J]$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \frac{1}{2} L \{I(t)\}^2 \\
 &= \frac{1}{2} L I_0^2 \sin^2 \omega t
 \end{aligned}$$

となり, 確かに周期的に増減を繰り返していることがわかります.

12.4 C 回路

直流の場合, コンデンサーに電流が流れるのは, 充電と放電のときだけでした. ここでは, コンデンサーに交流を流すことを考えます. 交流電源にコンデンサーを 1 個だけ繋いだ回路を C 回路と呼ぶことにします. C 回路においては, 電流と電位差の向きが時間とともに交互に入れ替わるので, 充電と放電を繰り返すことに相当する現象が起こり, 交流電流が常に流れることとなります. 交流電源の電位差が,

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t$$

で変化するとき, 電流はどのような式で表されるのでしょうか? 各時刻における電流の値は, 短い時間間隔を $\Delta t[s]$, その間に移動する電荷を $\Delta Q(t)[C]$ として,

$$I(t) = \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t}$$

と表されます. ここで, 時間間隔 $\Delta t[s]$ を限りなく 0 に近づける極限をとると, 上式の右辺は時間についての微分になります.

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

また, 電荷 $Q(t)[C]$ は, 電気容量を $C[F]$ として,

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= C \phi(t) \\
 &= C \phi_0 \sin \omega t
 \end{aligned}$$

です。よって、

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{d}{dt}(C\phi_0 \sin \omega t) \\ &= \omega C\phi_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

となります。ここで、電流の最大値を、

$$I_0 \equiv \omega C\phi_0$$

とすると、電流の瞬時値は、

$$I(t) = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

となります。この式から、電流の位相は電位差の位相より、 $\frac{\pi}{2}[\text{rad}]$ だけ大きい（進んでいる）ことがわかります。（位相のずれのため、瞬時値に関するオームの法則は成立しません。）この位相の関係は計算によって導かれましたが、その意味を直観的に考察しましょう。電荷の溜まっていないコンデンサーに直流電源を繋ぎ、スイッチを入れた場合を考えます。スイッチを入れた瞬間、コンデンサーは抵抗 $0[\Omega]$ の導線と同等であり、最大限の電流が流れます。一方、この瞬間において、溜まっている電荷が $0[C]$ なので、 $Q = C\phi$ より電位差も $0[V]$ です。つまり、電流が先行し、電位差は後からついてくることとなります。今考えたことは、直流電源でスイッチを入れた瞬間の場合でした。流れ始めの位相の関係は交流でも同様で、その後の位相の関係もそのまま引き継ぐこととなります。

また、上で出てきた、

$$I_0 = \omega C\phi_0$$

の式を変形すると、

$$\phi_0 = \frac{1}{\omega C} I_0$$

となります。この式は最大値に関するオームの法則を表しています。ここで、

$$\frac{1}{\omega C}$$

という物理量は抵抗に相当するもので、リアクタンスといいます。さらに変形して、

$$\begin{aligned} \frac{\phi_0}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \\ \therefore \phi_e &= \frac{1}{\omega C} I_e \end{aligned}$$

となります。この式は実効値に関するオームの法則を示しています。

次に、C回路におけるコンデンサーの消費電力を考えてみましょう。消費電力の瞬時値 $P(t)[W]$ を計算すると、

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)\phi(t) \\ &= I_0 \cos \omega t \cdot \phi_0 \sin \omega t \\ &= \frac{I_0 \phi_0}{2} \sin 2\omega t \end{aligned}$$

となります。この式から、時刻 $0[s]$ から、1周期後の時刻 $T[s]$ までの時間平均 $P[W]$ を計算してみます。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ &= \frac{I_0 \phi_0}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t dt \\ &= \frac{I_0 \phi_0}{2T} \left[-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

つまり、消費電力の時間平均は $0[J]$ です。エネルギーはコンデンサーと交流電源の間を行き来していることとなります。ここで、コンデンサーに蓄えられているエネルギーの瞬時値 $U(t)[J]$ を計算すると、

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{2} C \phi(t)^2 \\ &= \frac{1}{2} C \phi_0^2 \sin^2 \omega t \end{aligned}$$

となり、確かに周期的に増減を繰り返していることがわかります。

12.5 RLC 直列回路（交流電源がない場合）

コンデンサーを充電し、それをコイルに接続した場合、電位差と電流は時間とともに正弦的に振動します。このような現象を電気振動といいます。この回路で、コイルとコンデンサーでの電位差の瞬時値は等しく、また電流の瞬時値も等しくなります。（電流と電位差の瞬時値には位相のずれ $\frac{\pi}{2}[\text{rad}]$ がありました。）コイルについて、最大値に関するオームの法則、

$$\phi_0 = \omega L I_0$$

が成立します。一方、コンデンサーについて、最大値に関するオームの法則は、

$$\phi_0 = \frac{1}{\omega C} I_0$$

です。これら2つの電位差の最大値は等しくなります。故に、電気振動の角振動数を $\omega_0[\text{rad/s}]$ とすると、

$$\begin{aligned}\omega_0 L I_0 &= \frac{1}{\omega_0 C} I_0 \\ \therefore \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ \therefore \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}\end{aligned}$$

が求められます。電気振動はコイルの静磁エネルギー、

$$U(t) = \frac{1}{2} L \{I(t)\}^2$$

とコンデンサーの静電エネルギー、

$$U(t) = \frac{1}{2} C \{\phi(t)\}^2$$

とが、お互いに入れ替わることによって生じていると考えることもできます。導線の電気抵抗が無視できるとき、エネルギーは保存するので、

$$\frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} L \{I(t)\}^2 + \frac{1}{2} C \{\phi(t)\}^2 = \frac{1}{2} C \phi_0^2$$

が成立します。ここで、電気振動のアナロジーとして、水平ばね振り子を挙げておきます。水平ばね振り子では、運動エネルギー、

$$\frac{1}{2} m v^2$$

と、弾性エネルギー、

$$\frac{1}{2} k x^2$$

との間でエネルギーの交換が起こり、力学的エネルギーは保存します。このアナロジーではコイルの静磁エネルギーは運動エネルギーに、コンデンサーの静電エネルギーは弾性エネルギーに対応します。

電気振動を RLC 直列回路という広い視点から、微分方程式を使って一般的に取り扱ってみましょう。RLC 直列回路とは、抵抗、コイル、コンデンサーと交流電源を直列に繋いだ回路を指します。交流電源がある場合をまず考えて、微分方程式を求めてみます。RLC 直列回路に電流が流れ始めたときを考えます。このとき、抵抗には、

$$RI(t)$$

の電位差がかかります。また、コイルには外から電位差が、

$$L \frac{dI(t)}{dt}$$

だけかかります。(L回路の Section を参照して下さい。) さらに, コンデンサーには,

$$\frac{Q(t)}{C}$$

の電位差が生じます. 電位の高低の向きは全て同じです. この3つの電位差の合計と交流電源の起電力が等しくなります. したがって, 交流電源の起電力が,

$$\phi_0 \sin \omega t$$

で表される場合,

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = \phi_0 \sin \omega t$$

が成立します. ここで, 両辺を時間で微分すると,

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ(t)}{dt} = \omega \phi_0 \cos \omega t$$

ですから,

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \omega \phi_0 \cos \omega t \quad (12.1)$$

となります.

交流電源がない場合, (12.1) 式で右辺を 0 とおいた同次方程式になります.

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0$$

この微分方程式を, 複素数を使った解法で解くことにしましょう.(この同次微分方程式は減衰振動の微分方程式,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

と全く同形です. したがって, 解法も同じです.) まず,

$$\tilde{I}(t) \equiv I(t) + i \cdot J(t)$$

と実数部と虚数部を持つ複素電流 $\tilde{I}(t)$ を導入します. ここで, $I(t)$ と $J(t)$ は実数です. 複素数の微分方程式,

$$L \frac{d^2 \tilde{I}(t)}{dt^2} + R \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} + \frac{1}{C} \tilde{I}(t) = 0$$

を解き, その解の実数部がもとの微分方程式の解になります. このことは, 複素数の微分方程式を変形して,

$$\begin{aligned} L \frac{d^2}{dt^2} (I(t) + iJ(t)) + R \frac{d}{dt} (I(t) + iJ(t)) + \frac{1}{C} (I(t) + iJ(t)) &= 0 \\ \therefore (L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t)) + i(L \frac{d^2 J(t)}{dt^2} + R \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{1}{C} J(t)) &= 0 \end{aligned}$$

とすれば理解できます。ここで、

$$\tilde{I}(t) \equiv \alpha \cdot e^{\lambda t}$$

とおき直します。 α も λ も複素数です。このとき、

$$\begin{aligned} L\lambda^2 \alpha e^{\lambda t} + R\lambda \alpha e^{\lambda t} + \frac{1}{C} \alpha e^{\lambda t} &= 0 \\ \therefore L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} &= 0 \end{aligned}$$

ですが、最後の式の2次方程式を解くと、

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \\ &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

となります。ルートの中の数の正負0により、3通りの場合分けが考えられます。

最初に、 R が小さい場合を取り扱います。すなわち、

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$$

の場合です。このとき、

$$\lambda = -\gamma \pm i\omega'$$

となります。ただし、

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{R}{2L} \\ \omega' &\equiv \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned}$$

とおきました。 $\tilde{I}(t)$ は、

$$\tilde{I}(t) = \alpha_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega' t} + \alpha_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega' t}$$

となります。ここで、複素数 α_1, α_2 を実数 a_1, a_2, b_1, b_2 を使って実数部と虚数部に分け、複素数の指数関数をオイラーの公式により、三角関数で表します。そして、 $\tilde{I}(t)$ を実数部と虚数部に分けます。

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t) &= (a_1 + ib_1)e^{-\gamma t}(\cos \omega' t + i \sin \omega' t) + (a_2 + ib_2)e^{-\gamma t}(\cos \omega' t - i \sin \omega' t) \\ &= \{(-b_1 + b_2)e^{-\gamma t} \sin \omega' t + (a_1 + a_2)e^{-\gamma t} \cos \omega' t\} + i\{(a_1 - a_2)e^{-\gamma t} \sin \omega' t + (b_1 + b_2)e^{-\gamma t} \cos \omega' t\} \end{aligned}$$

ここで、

$$A_1 \equiv -b_1 + b_2$$

$$A_2 \equiv a_1 + a_2$$

とおき、実数部をとって、同次微分方程式の解は次のようになります。

$$\begin{aligned} I(t) &= A_1 e^{-\gamma t} \sin \omega' t + A_2 e^{-\gamma t} \cos \omega' t \\ &= A e^{-\gamma t} (a \sin \omega' t + b \cos \omega' t) \quad (A_1 \equiv Aa, A_2 \equiv Ab) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A' &\equiv \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \theta_0 &\equiv \frac{b}{a} \end{aligned}$$

とおき、三角関数の公式を使うと、

$$I(t) = A e^{-\gamma t} A' \sin(\omega' t + \theta_0)$$

となります。さらに、

$$I_0 \equiv AA'$$

とおくと、解は最終的に、

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \theta_0)$$

となります。この式を見ると電流が振動していることがわかります。抵抗がある場合は、

$$\gamma \equiv \frac{R}{2L} > 0$$

となり、振動の振幅が時間とともに指数関数的に減少していきます。このような振動を減衰振動といいます。一方、抵抗が完全に $0[\Omega]$ の場合、

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{R}{2L} = 0 \\ \omega' &\equiv \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} (\equiv \omega_0) \end{aligned}$$

となるので、

$$I(t) = I_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

と表されるように単振動します。これが、この Section で最初に初等的に取り扱った電気振動を表す式になります。

次に、抵抗が大きい場合、すなわち、

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$$

の場合を考えましょう。このとき、

$$\lambda_1 \equiv \gamma - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\lambda_2 \equiv \gamma + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t) &= \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} \\ &= (a_1 + ib_1)e^{-\lambda_1 t} + (a_2 + ib_2)e^{-\lambda_2 t} \\ &= \{a_1 e^{-\lambda_1 t} + a_2 e^{-\lambda_2 t}\} + i\{b_1 e^{-\lambda_1 t} + b_2 e^{-\lambda_2 t}\} \end{aligned}$$

なので、実数部をとり、解は、

$$I(t) = a_1 e^{-\lambda_1 t} + a_2 e^{-\lambda_2 t}$$

となります。電流は振動せずに指数関数的に減少しますが、これを過減衰といいます。

最後に、

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$$

のときを考えましょう。このとき、

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t) &= \alpha e^{-\gamma t} \\ &= (a + ib)e^{-\gamma t} \\ &= ae^{-\gamma t} + ibe^{-\gamma t} \end{aligned}$$

なので、実数部をとって、

$$I(t) = ae^{-\gamma t}$$

となります。しかし、2階線形微分方程式を取り扱っているのに、このままでは一般解にはできません。そこで、

$$I(t) = a(t)e^{-\gamma t}$$

とおいてみます。このとき、時間微分して、

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} e^{-\gamma t} - \gamma a(t) e^{-\gamma t}$$

となります。さらに、もう一回時間微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 a(t)}{dt^2} e^{-\gamma t} - \gamma \frac{da(t)}{dt} e^{-\gamma t} - \gamma \frac{da(t)}{dt} e^{-\gamma t} + \gamma^2 a(t) e^{-\gamma t} \\ &= \frac{d^2 a(t)}{dt^2} e^{-\gamma t} - 2\gamma \frac{da(t)}{dt} e^{-\gamma t} + \gamma^2 a(t) e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

となります。これらをもとの同次方程式,

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0$$

に代入すると,

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{d^2 a(t)}{dt^2} e^{-\gamma t} - 2\gamma \frac{da(t)}{dt} e^{-\gamma t} + \gamma^2 a(t) e^{-\gamma t} \right\} + R \left\{ \frac{da(t)}{dt} e^{-\gamma t} - \gamma a(t) e^{-\gamma t} \right\} + \frac{1}{C} a(t) e^{-\gamma t} &= 0 \\ \therefore L \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} - 2\gamma \frac{da(t)}{dt} + \gamma^2 a(t) \right) + R \left(\frac{da(t)}{dt} - \gamma a(t) \right) + \frac{1}{C} a(t) &= 0 \end{aligned}$$

となります。

$$\gamma \equiv \frac{R}{2L}$$

ですから,

$$\begin{aligned} L \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} - 2 \frac{R}{2L} \frac{da(t)}{dt} + \frac{R^2}{4L^2} a(t) \right) + R \left(\frac{da(t)}{dt} - \frac{R}{2L} a(t) \right) + \frac{1}{C} a(t) &= 0 \\ \therefore L \frac{d^2 a(t)}{dt^2} - L \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \right) a(t) &= 0 \end{aligned}$$

となります。いま,

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$$

の場合を考えていたので,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} &= 0 \\ \therefore a(t) &= At + B \quad (A, B : \text{const}) \end{aligned}$$

となり, 一般解は,

$$I(t) = (At + B)e^{-\gamma t}$$

と表せます。やはり電流は振動せず指数関数的に減少することがわかります。この状態を臨界減衰といいます。

12.6 RLC 直列回路 (交流電源がある場合)

交流電源がある場合の, RLC 直列回路を初等的に取り扱ってみましょう。(この Section の後半は微分方程式による解法を見ていきます。) 直列であるので抵抗, コイル, コンデンサーに流れる電流が共通になりますが, それを,

$$I(t) = I_0 \sin \omega t$$

とおきます。このとき、R 回路、L 回路、C 回路について、最大値に関するオームの法則と、電流と電位差の位相の関係より、R、L、C にかかる電位差は次の式で表されます。

$$\phi_R(t) = RI_0 \sin \omega t$$

$$\phi_L(t) = \omega LI_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\phi_C(t) = \frac{1}{\omega C} I_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

電流と電位差の間の関係を、位相に注意しながら図に示します。この図より、交流電源の

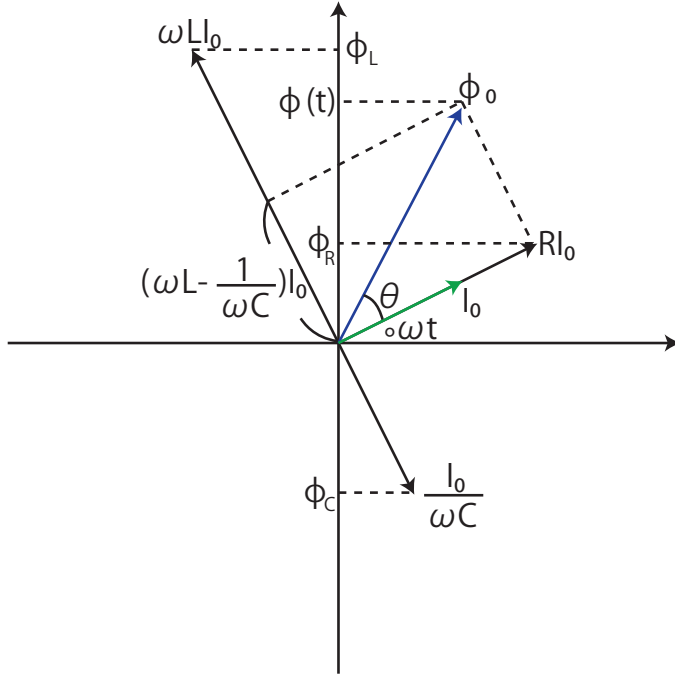


Figure 12.2: RLC 直列回路

電位差の瞬時値は、

$$\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \theta)$$

で表されます。さらに、図より、

$$\phi_0^2 = (RI_0)^2 + \{(\omega L - \frac{1}{\omega C})I_0\}^2$$

$$\therefore \phi_0^2 = \{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\}I_0^2$$

$$\therefore \phi_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \times I_0$$

となります。ここで、

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

と定義します。この量は RLC 直列回路の抵抗に相当するもので、インピーダンスといいます。このとき、

$$\phi_0 = ZI_0$$

という最大値に関するオームの法則が成立します。また、電位差の位相と電流の位相の差を $\theta[\text{rad}]$ とおくと、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})I_0}{RI_0} \\ \therefore \tan \theta &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\end{aligned}$$

の関係が成立します。ここで、抵抗が小さく、さらに、

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

が成立するとき、インピーダンスは微小になり、交流電流は極端に大きくなります。この現象が交流回路における共振と呼ばれるものです。

それでは、交流電源がある場合の RLC 直列回路について、微分方程式を使って取り扱ってみましょう。交流電源の起電力が、

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t$$

で表される場合、電流についての微分方程式は、

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \omega \phi_0 \cos \omega t \quad (12.2)$$

となることは、前の Section で導出しました。線形微分方程式の解法の一般論にしたがい、右辺を 0 とおいた同次方程式、

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0$$

の解と (12.2) 式の特解の和によって一般解を求めます。同次方程式の解は前の Section でみたように、3つの場合についてそれぞれ求めました。次に、(12.2) 式の特解を求めなくてはなりません、この方程式は抵抗力がある場合の強制振動の微分方程式、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t$$

と同形であることに注意します。そのときと同じく、複素数を使った解法を採用することにします。(12.2) 式の左辺の電流の代わりに複素電流、

$$\tilde{I}(t) \equiv I(t) + iJ(t)$$

を考え、右辺を、

$$\omega\phi_0 e^{i\omega t}$$

とおき直します。このとき、

$$L\frac{d^2\tilde{I}(t)}{dt^2} + R\frac{d\tilde{I}(t)}{dt} + \frac{1}{C}\tilde{I}(t) = \omega\phi_0 e^{i\omega t}$$

の微分方程式の解の実数部が(12.2)式の解になります。このことは、この複素数の微分方程式を変形して、

$$\begin{aligned} L\frac{d^2}{dt^2}(I(t) + iJ(t)) + R\frac{d}{dt}(I(t) + iJ(t)) + \frac{1}{C}(I(t) + iJ(t)) &= \omega\phi_0(\cos\omega t + i\sin\omega t) \\ \therefore(L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t)) + i(L\frac{d^2J(t)}{dt^2} + R\frac{dJ(t)}{dt} + \frac{1}{C}J(t)) &= \omega\phi_0\cos\omega t + i\omega\phi_0\sin\omega t \end{aligned}$$

とすれば理解できます。さらに複素電流の角周波数は交流電源の角周波数 $\omega[\text{rad/s}]$ に等しいので、

$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$$

とおき直します。 \tilde{I}_0 も複素数で、この中に交流電源の電位差の位相と複素電流の位相とのずれがくりこまれることになります。複素電流を時間で微分していくと、

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} &= i\omega\tilde{I}_0 e^{i\omega t} \\ \therefore\frac{d^2\tilde{I}(t)}{dt^2} &= -\omega^2\tilde{I}_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

となります。これらを微分方程式に代入して整理していきます。

$$\begin{aligned} -\omega^2 L\tilde{I}_0 e^{i\omega t} + i\omega R\tilde{I}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{C}\tilde{I}_0 e^{i\omega t} &= \omega\phi_0 e^{i\omega t} \\ \therefore -\omega L\tilde{I}_0 + iR\tilde{I}_0 + \frac{1}{\omega C}\tilde{I}_0 &= \phi_0 \\ \therefore\{(-\omega L + \frac{1}{\omega C}) + iR\}\tilde{I}_0 &= \phi_0 \\ \therefore\tilde{I}_0 &= \frac{\phi_0}{(-\omega L + \frac{1}{\omega C}) + iR} \end{aligned}$$

最後の式の右辺の分母を複素インピーダンス、

$$\tilde{Z} \equiv (-\omega L + \frac{1}{\omega C}) + iR$$

と定義します。このとき、複素インピーダンスの絶対値は、

$$\begin{aligned}
 Z &\equiv |\tilde{Z}| \\
 &= \sqrt{|\tilde{Z}|^2} \\
 &= \sqrt{\tilde{Z}^* \tilde{Z}} \\
 &= \sqrt{\left\{(-\omega L + \frac{1}{\omega C}) - iR\right\} \left\{(-\omega L + \frac{1}{\omega C}) + iR\right\}} \\
 &= \sqrt{\left(-\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} \\
 &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}
 \end{aligned}$$

となります。 $Z[\Omega]$ は実数ですが、初等的に考えたインピーダンスと一致していることが確認できます。ここで、複素平面上における複素インピーダンスの位相を $\delta[\text{rad}]$ とおくと、

$$\tilde{Z} = Z e^{i\delta}$$

と表されます。ただし、

$$\tan \delta = \frac{R}{-\omega L + \frac{1}{\omega C}}$$

です。以上より、

$$\tilde{I}_0 = \frac{\phi_0}{Z e^{i\delta}}$$

となります。よって、

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}(t) &= \frac{\phi_0}{Z e^{i\delta}} e^{i\omega t} \\
 &= \frac{\phi_0}{Z} e^{i(\omega t - \delta)} \\
 &= \frac{\phi_0}{Z} \{\cos(\omega t - \delta) + i \sin(\omega t - \delta)\}
 \end{aligned}$$

となります。実数部をとり、交流電流は、

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \frac{\phi_0}{Z} \cos(\omega t - \delta) \\
 &= \frac{\phi_0}{Z} \sin\left\{\omega t - \left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)\right\}
 \end{aligned}$$

となります。交流電源の電位差が、

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t$$

だったことを思い出すと、

$$\theta \equiv \delta - \frac{\pi}{2}$$

が電位差と電流の位相差になっていることがわかります。このとき、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cot \delta \\ &= -\frac{-\omega L + \frac{1}{\omega C}}{R} \\ &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\end{aligned}$$

となり、この Section の最初に取り扱った初等的議論の結果と一致することが確認されます。また、交流電源の電位差の位相を $\omega t[\text{rad}]$ とした場合、電流の位相が $\omega t - \theta[\text{rad}]$ となることがわかりました。これを初等的議論の結果と完全に合わせるためには、交流電源の電位差の位相も電流の位相も $\theta[\text{rad}]$ だけ進めればよいです。このとき、交流電源の電位差の位相は $\omega t + \theta[\text{rad}]$ であり、直列回路共通の電流の位相は $\omega t[\text{rad}]$ となります。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Part II

電磁気学の成立

Chapter 13

マクスウェル方程式

13.1 マクスウェル方程式

いままでの Chapter に出てきた電場と磁場に関する法則の微分形の方程式を再掲します。まず，静電場に関するガウスの法則，

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (13.1)$$

と，静磁場に関するガウスの法則，

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad (13.2)$$

が成立します。そして，電場と磁場の間に成立する法則は2つあります。定常電流がつくる静磁場についてのアンペールの法則，

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \quad (13.3)$$

と，ファラデーの電磁誘導の法則，

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} \quad (13.4)$$

です。(13.4) 式は時間的変化に関しても含んだ方程式になっています。残りの3式も時間的変化を取り入れた方程式に修正しましょう。静電場と静磁場に関するガウスの法則 (13.1) 式と (13.2) 式は，そのままの形で時間的に変動する電場，磁場の場合に拡張できるものとします。すなわち，

$$\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{\rho(t, \vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

とします。

ここで、アンペールの法則 (13.3) 式を修正する準備をしておきます。電流保存則 (積分形) は、

$$\int_S \vec{i}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = 0$$

でした。この法則は定常電流に対して成立するものです。電気の流れが定常的ではなく、面 S から流失する電荷が正の値をもつとき、 S の内部にある電荷の値 $Q[C]$ は減少します。その単位時間当たりの減少量は、 $-\frac{dQ}{dt}$ で与えられるので、上の電流保存則の代わりに、電荷保存則 (積分形)、

$$-\frac{dQ(t)}{dt} = \int_S \vec{i}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS$$

が成り立ちます。ここで、電荷 $Q(t)[C]$ は電荷密度 $\rho[C/m^3]$ を使って、

$$Q(t) = \int_V \rho(t, \vec{x}) dV$$

と体積分で表せます。また、ベクトル解析のガウスの定理、

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV = \int_S \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS$$

が成立しますので、面積分を体積分で表すことができます。したがって、電荷保存則は、次のように変形できます。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(t, \vec{x}) dV &= \int_S \nabla \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) dV \\ \therefore \frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

最後の式が電荷保存則 (微分形) であり、連続の方程式ともいいます。

話をもとに戻して、アンペールの法則 (13.3) 式に時間変化を取り入れて拡張しましょう。そのままの形で拡張すると、

$$\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \mu_0 \vec{i}(t, \vec{x})$$

となります。ここで、この式の両辺の発散をとると、

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{i}(t, \vec{x})$$

となりますが、左辺はベクトル解析の公式、

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

より、恒等的に 0 になります。したがって、

$$\nabla \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) = 0$$

となりますが、この式は定常電流の保存則です。しかし、電荷密度と電流密度が時間的に変化する場合は、電荷保存則である連続の方程式、

$$\frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) = 0$$

が成立しなければなりません。そこで、ここが肝心なところですが、マクスウェルは方程式に変位電流と呼ばれるものを付け加えて、次のようにアンペールの法則を修正しました。

$$\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \mu_0 \vec{i}(t, \vec{x}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

このとき、両辺の発散をとると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) &= \mu_0 \nabla \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \{\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x})\}}{\partial t} \\ \therefore \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho(t, \vec{x})}{\varepsilon_0} \right) + \mu_0 \nabla \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) &= 0 \\ \therefore \frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

となり、連続の方程式が成立します。以上で、電磁気学の基礎方程式である4式からなるマクスウェル方程式が揃いました。まとめておきましょう。

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{\rho(t, \vec{x})}{\varepsilon_0}} \quad (13.5)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0} \quad (13.6)$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} = \mu_0 \vec{i}(t, \vec{x})} \quad (13.7)$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0} \quad (13.8)$$

また、電場と磁場が存在するとき、運動する荷電粒子が受ける力は、“アンペール力とローレンツ力”のChapterより、

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}} \quad (13.9)$$

で表されました。(13.5)式、(13.6)式、(13.7)式、(13.8)式のマクスウェル方程式4式と(13.9)式の合計5式が電磁気学の根幹を成しています。

13.2 電磁場のエネルギー

電磁場のエネルギーについて、考えてみましょう。まず、 $\vec{E}(t, \vec{x})[N/C]$ と (13.7) 式、 $\vec{B}(t, \vec{x})[T]$ と (13.8) 式のスカラー積を、それぞれつくと、

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) \cdot (\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}) &= \mu_0 \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) \\ \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot (\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}) &= 0\end{aligned}$$

を得ます。下の式から上の式を辺々引いて計算すると、

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \mu_0 \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{B}(t, \vec{x}) \cdot (\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x})) - \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot (\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x})) &= -\mu_0 \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) \\ \therefore \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 E^2(t, \vec{x}) + \frac{1}{2} B^2(t, \vec{x}) \right) + \nabla \cdot (\vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{B}(t, \vec{x})) &= -\mu_0 \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \vec{i}(t, \vec{x})\end{aligned}$$

ですから、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(t, \vec{x}) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2(t, \vec{x}) \right) + \nabla \cdot (\vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{H}(t, \vec{x})) = -\vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) \quad (13.10)$$

が得られます。ただし、ベクトル解析の公式、

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

と、

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \mu_0 \vec{H}(t, \vec{x})$$

の関係式を用いました。ここで、次の2つの量を定義します。

$$\begin{aligned}u(t, \vec{x}) &\equiv \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(t, \vec{x}) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2(t, \vec{x}) \\ \vec{S}(t, \vec{x}) &\equiv \vec{E}(t, \vec{x}) \times \vec{H}(t, \vec{x})\end{aligned}$$

このとき、(13.10) 式は、

$$\frac{\partial u(t, \vec{x})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}(t, \vec{x}) = -\vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \vec{i}(t, \vec{x}) \quad (13.11)$$

となります。この (13.11) 式は連続の方程式とよく似た形をしています。Balance 方程式といいます。そして、次のように解釈できます。右辺の $\vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \vec{i}(t, \vec{x})[J/m^3 \cdot s]$ は、単位体積中の荷電粒子が、電場から受ける単位時間当たりの仕事でした。磁場が存在していても、ローレンツ力は荷電粒子の運動の向きに垂直に働くので、荷電粒子は磁場から仕事をされません。したがって、右辺の量は電磁場が荷電粒子に仕事をした分だけ減少するものです。そして、電磁場が荷電粒子に仕事をした分だけ減少するものは、電磁場のエネルギーです。故に、 $u(t, \vec{x})[J/m^3]$ は電磁場のエネルギー密度、 $\vec{S}(t, \vec{x})[J/m^2 \cdot s]$ は電磁場のエネルギー密度の流れを表すベクトル（ポインティングベクトルといいます。）と定義することができます。上記の (13.11) 式は電磁場のエネルギー保存則を表しています。

13.3 電磁ポテンシャル

マクスウェル方程式をもう少し見やすい形に変形しておきましょう。そのために電磁ポテンシャルといわれるものを導入します。まず、静電場の場合、“静電位”の Chapter で出てきた、

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\phi(\vec{x})$$

が成立します。つまり、静電場はスカラー・ポテンシャル（電位） $\phi(\vec{x})$ によって表すことができます。また、静磁場の場合には、ガウスの法則（微分形）、

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \tag{13.12}$$

が成立します。ここで、任意のベクトル関数 $\vec{A}(\vec{x})$ を導入して、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x})$$

より、常に (13.12) 式が成立することが保証されます。 $\vec{A}(\vec{x})$ をベクトル・ポテンシャルといいます。スカラー・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルを併せて電磁ポテンシャルといいます。

それでは、時間的に変動する一般の電磁場の場合は、どのようになるのでしょうか？磁場に関しては、ガウスの法則（微分形）(13.12) 式を拡張したマクスウェル方程式の第 2 式である (13.6) 式、

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

が成立しましたので、

$$\boxed{\vec{B}(t, \vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(t, \vec{x})} \tag{13.13}$$

となります。時間依存性を含む場合、電場については、ファラデーの電磁誘導の法則、すなわち、マクスウェル方程式の第 4 式である (13.8) 式、

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0$$

が成立しました。左辺第 2 項が 0 でないため、電場をスカラー・ポテンシャルのみで表すことは不可能です。そこで、先程の (13.13) 式を、左辺第 2 項に代入して計算します。

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \{\nabla \times \vec{A}(t, \vec{x})\}}{\partial t} = 0$$

ですから、

$$\nabla \times \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} \right) = 0 \tag{13.14}$$

となります。ここで、

$$\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} = -\nabla\phi(t, \vec{x})$$

とおき, 新たなスカラー・ポテンシャル $\phi(t, \vec{x})$ を導入すると, ベクトル解析の公式,

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

より, (13.14) 式が成立することが保証されます. よって, 時間的に変動する電場は, 次式で表されます.

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} - \nabla \phi(t, \vec{x}) \quad (13.15)$$

13.4 物理量と単位の定義

いままでの Chapter に出てきた電磁気学の物理量と単位についてまとめておきます. 電磁気学では MKSA 単位系を採用します. すなわち, 長さの単位に $[m]$, 質量の単位に $[kg]$, 時間の単位に $[s]$, 電流の単位に $[A]$ を使います. その中の電流の単位 $[A]$ の定義から始めましょう. そのために, 平行電流間に働き合う力を考えます. 1 本の電流を $I_1[A]$, もう 1 本の電流を $I_2[A]$ とします. 電流間の距離を $r[m]$ とすると, 働き合う力の大きさ $F[N]$ は,

$$F \propto \frac{I_1 I_2}{r}$$

ですので, 導線 $1[m]$ あたりに働き合う力の大きさ $F[N]$ を,

$$F[N/m] = 2.0 \times 10^{-7} [N/A^2] \times \frac{I_1[A] I_2[A]}{r[m]}$$

と表し, 電流の単位 $[A]$ を定義します. つまり, $1[A]$ とは真空中で $1[m]$ 隔てて平行に置かれた 2 本の導線に同じ強さの電流を流したとき, 導線同士が及ぼしあう力の大きさが $1[m]$ あたり, $2.0 \times 10^{-7} [N]$ のときの電流の強さとします. 電流の単位 $[A]$ が定義されたので, これから電荷 Q の単位 $[C]$ を定義します. $Q = It$ より,

$$1[C] = 1[A] \times 1[s]$$

と決定されます.

次に, 導線 $\ell[m]$ あたりに電流 $I_1[A]$ に働く力 $F[N]$ を, 電流 $I_2[A]$ がつくる磁場 $H[A/m]$ で表してみると,

$$\begin{aligned} F[N] &= 2.0 \times 10^{-7} [N/A^2] \times \frac{I_1[A] I_2[A]}{r[m]} \times \ell[m] \\ &= I_1[A] \times 4\pi \times 10^{-7} [N/A^2] \times \frac{I_2[A]}{2\pi r[m]} \times \ell[m] \\ &= I_1[A] \times \mu_0 [N/A^2] H[A/m] \times \ell[m] \end{aligned}$$

となります. ただし,

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} [N/A^2]$$

と真空の透磁率を定義しました。さらに、上式を、

$$F = IB\ell$$

と変形し、磁束密度 $B[T]$ を次式で定義します。つまり、

$$B[T] = \mu_0[N/A^2]H[A/m]$$

となります。ここで、

$$[T] = [N/A \cdot m]$$

の関係があることがわかります。

それから、磁気力 $F[N]$ に関しては、

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

が成立します。ここで、電荷に関するクーロンの法則、

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

に合わせて、磁気力 $F[N]$ を、

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

と表し、磁荷 $m[Wb]$ を定義します。このとき、

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi \times 4\pi \times 10^{-7}} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \\ &= \frac{10^7}{(4\pi)^2} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \end{aligned}$$

となります。

磁荷の単位と磁束の単位が同じになることも確認しておきましょう。

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{m}{r^2}$$

より、

$$\begin{aligned} m &= 4\pi\mu_0 r^2 H \\ &= 4\pi \frac{B}{H} r^2 H \\ &= 4\pi B r^2 \end{aligned}$$

です。故に、磁荷の単位は、

$$[Wb] = [T][m^2]$$

となります。これは確かに、磁束 $\Phi = BS$ の単位と一致します。

Chapter 14

電磁波

14.1 電磁波

前の Chapter で見たように、電磁気学の根幹をなすマクスウェル方程式とは次の 4 式のことです。

$$\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{\rho(t, \vec{x})}{\epsilon_0} \quad (14.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \quad (14.2)$$

$$\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}(t, \vec{x}) \quad (14.3)$$

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0 \quad (14.4)$$

ここで、電荷密度 $\rho(t, \vec{x})[C/m^3]$ と電流密度 $\vec{j}(t, \vec{x})[A/m^2]$ が 0 であるような真空の空間領域を考え、その領域で起こる現象を調べましょう。このとき、マクスウェル方程式は次のようになります。

$$\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = 0 \quad (14.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \quad (14.6)$$

$$\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0 \quad (14.7)$$

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0 \quad (14.8)$$

それでは、電場 $\vec{E}(t, \vec{x})[N/C]$ の満たす方程式を導きましょう。(14.8) 式に左から $\nabla \times$ を掛けます。(回転をとります。)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x})) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x})) = 0$$

ここで、ベクトル解析の公式、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

より、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x})) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x})) - \nabla^2 \vec{E}(t, \vec{x})$$

ですが、ここで、(14.5) 式より、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x})) = -\nabla^2 \vec{E}(t, \vec{x})$$

となります。さらに、(14.7) 式より、

$$\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

となります。故に、 $\vec{E}(t, \vec{x})[N/C]$ の満たす方程式は、

$$-\nabla^2 \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}) = 0$$

ですから、

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{E}(t, \vec{x}) \quad (14.9)$$

となります。次に、磁束密度 $\vec{B}(t, \vec{x})[T]$ の満たす方程式を導きましょう。(14.7) 式に左から $\nabla \times$ を掛けます。(回転をとります。)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x})) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x})) = 0$$

ここで、ベクトル解析の公式、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

より、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x})) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x})) - \nabla^2 \vec{B}(t, \vec{x})$$

ですが、ここで、(14.6) 式より、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x})) = -\nabla^2 \vec{B}(t, \vec{x})$$

となります。さらに、(14.8) 式より、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x})) = -\frac{\partial^2 \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t^2}$$

となります。故に、 $\vec{B}(t, \vec{x})[T]$ の満たす方程式は、

$$-\nabla^2 \vec{B}(t, \vec{x}) - \varepsilon_0 \mu_0 \left(-\frac{\partial^2 \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t^2}\right) = 0$$

ですから,

$$\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{B}(t, \vec{x}) \quad (14.10)$$

となります.

ここで, (14.9) 式と (14.10) 式は, 3次元波動方程式,

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(t, \vec{x})$$

と同じ形をしていることに注意しましょう. (ただし, v は波動の伝搬速度の大きさ, $\psi(t, \vec{x})$ は波動のもつ一般量です.) つまり, 電場 $\vec{E}(t, \vec{x})[N/C]$ と磁束密度 $\vec{B}(t, \vec{x})[T]$ は, 波動として空間に対して時間的に伝搬するのです. この波動のことを電磁波といいます. さらに, その伝搬の速さ $c[m/s]$ は, (14.9) 式と (14.10) 式を波動方程式と比較することにより, 次のように求められます.

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0$$

ですから,

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8.8541878 \times 10^{-12}[F/m] \times 4\pi(= 3.14159265) \times 10^{-7}[N/A^2]}} \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{111.265 \times 10^{-19}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{11.1265 \times 10^{-9}}} \\ &= \frac{\sqrt{11.1265}}{11.1265} \times 10^9 \\ &\cong \frac{3.33564}{11.1265} \times 10^9 \\ &\cong 0.299792 \times 10^9 \\ &= 2.99792 \times 10^8[m/s] \end{aligned}$$

です. この数値は光速の測定値,

$$c = 2.99792 \times 10^8[m/s]$$

と完全に一致します. もっとも, 現代では, 真空の誘電率 $\epsilon_0[F/m]$ は光速 $c[m/s]$ から計算するので, この完全な一致は当然です. しかし, その当時, 光速と電磁波の伝搬速度の一致は予測できなかったもので, 光が電磁波であることの確固たる証拠となりました. この偉大な発見は物理学の勝利の一つと言えるでしょう. また, 光が電磁波であることは特殊相対性理論の理論的基礎となっています.

電場 $\vec{E}(t, \vec{x})[N/C]$ と磁束密度 $\vec{B}(t, \vec{x})[T]$ の具体的な 1 つの解としては、波動方程式の一般論に従い、正弦波を挙げることができます。電場については、

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \hat{e}^{(1)} E_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \hat{e}^{(1)} E_0 \sin(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})$$

であり、磁束密度については、

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \hat{e}^{(2)} B_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \hat{e}^{(2)} B_0 \sin(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})$$

です。電場 $\vec{E}(t, \vec{x})[N/C]$ と磁束密度 $\vec{B}(t, \vec{x})[T]$ のそれぞれについて、最初の式が正の方向に伝搬する波動、2 番目の式が負の方向に伝搬する波動を表します。以下の議論では、正の方向に伝搬する波動を扱います。負の方向に伝搬する波動についても同様です。 $E_0[N/C]$ と $B_0[T]$ は電場と磁束密度のそれぞれの振幅を、 $\hat{e}^{(1)}$ と $\hat{e}^{(2)}$ は電場と磁束密度それぞれのベクトルの方向の単位ベクトルを表します。ここで、(14.5) 式、

$$\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = 0$$

の左辺に、正の方向に伝搬する電場 $\vec{E}(t, \vec{x})[N/C]$ の表式を代入して計算します。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= e_x^{(1)}(-k_x)E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) + e_y^{(1)}(-k_y)E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) + e_z^{(1)}(-k_z)E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= -(e_x^{(1)}k_x + e_y^{(1)}k_y + e_z^{(1)}k_z)E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= -(\hat{e}^{(1)} \cdot \vec{k})E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

よって、(14.5) 式より、

$$-(\hat{e}^{(1)} \cdot \vec{k})E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) = 0$$

$$\therefore \hat{e}^{(1)} \cdot \vec{k} = 0$$

が成立します。同様に、(14.6) 式、

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

の左辺に、正の方向に伝搬する磁束密度 $B(t, \vec{x})[T]$ の表式を代入して計算します。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= e_x^{(2)}(-k_x)B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) + e_y^{(2)}(-k_y)B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) + e_z^{(2)}(-k_z)B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= -(e_x^{(2)}k_x + e_y^{(2)}k_y + e_z^{(2)}k_z)B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= -(\hat{e}^{(2)} \cdot \vec{k})B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

よって, (14.6) 式より,

$$\begin{aligned} & -(\hat{e}^{(2)} \cdot \vec{k})B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) = 0 \\ \therefore \hat{e}^{(2)} \cdot \vec{k} &= 0 \end{aligned}$$

が成立します. つまり, 波動の偏りの方向 $\hat{e}^{(1)}$ と $\hat{e}^{(2)}$ は波動の進行方向 \vec{k} [rad/m] に対して直交しています. すなわち, 電磁波は横波であることが証明されました. このことは, 先に述べた電磁波の伝搬速度が光速に一致することとともに, 光が電磁波であることの証拠となりました. (14.8) 式,

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0$$

に, 正の方向に伝搬する正弦波の式を代入して計算します.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) = 0 \\ \therefore (e_z^{(1)}(-k_y) - e_y^{(1)}(-k_z), e_x^{(1)}(-k_z) - e_z^{(1)}(-k_x), e_y^{(1)}(-k_x) - e_x^{(1)}(-k_y)) E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \\ & + \hat{e}^{(2)} \omega B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) = 0 \\ \therefore E_0 \cdot \hat{e}^{(1)} \times \vec{k} + \omega B_0 \hat{e}^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

ここで, 伝搬方向に向きをもつ波数ベクトル \vec{k} の向きの単位ベクトルを, $\hat{e}^{(3)}$ とおきます. このとき, \vec{k} の大きさを k として,

$$\vec{k} = k \hat{e}^{(3)}$$

と表せます. したがって, 上の式は,

$$\begin{aligned} E_0 \cdot \hat{e}^{(1)} \times k \hat{e}^{(3)} + \omega B_0 \hat{e}^{(2)} &= 0 \\ \therefore B_0 \hat{e}^{(2)} &= -\frac{k}{\omega} E_0 \cdot \hat{e}^{(1)} \times \hat{e}^{(3)} \\ \therefore B_0 \hat{e}^{(2)} &= \frac{k}{\omega} E_0 \cdot \hat{e}^{(3)} \times \hat{e}^{(1)} \end{aligned}$$

となります. さらに,

$$\begin{aligned} \frac{k}{\omega} &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{T}{2\pi} \\ &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

なので,

$$B_0 \hat{e}^{(2)} = \frac{E_0}{c} \cdot \hat{e}^{(3)} \times \hat{e}^{(1)}$$

の関係が成立します. この式を, 振幅の関係と偏りの関係に分けて書くと次のようになり

ます.

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$\hat{e}^{(2)} = \hat{e}^{(3)} \times \hat{e}^{(1)}$$

したがって，電磁波の様子を図に示すと次のようになります.

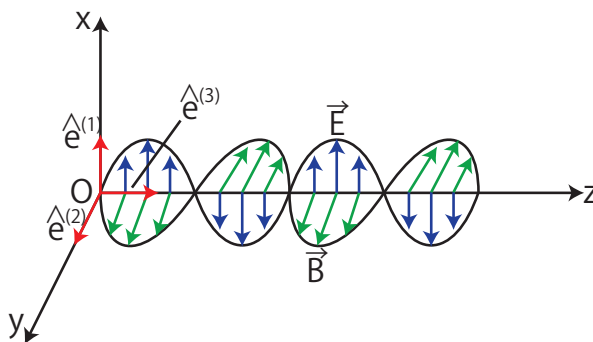


Figure 14.1: 電磁波

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>